ALBERTUS KIRCHMAYER
CAN. R.W. PROF. RHET.

GL 161 (2)
n.V.

Ant. Zeplichals,

der S. J.

Algebre in Tabellen

zum

Gebrauche der Jünglinge

und aller,

die sich belehren wollen.

Zweyte veränderte und verbesserte Auflage.

M. 109.

KGL. STUD. BIBLIOTHEK LANDSHUT

Breslau,

bey Johann Friedrich Korn dem ältern, 1774.

Vorrede

Ueber das Vortreffliche der Algebre.

Sind die Zeiten, zu welchen wir leben, so aufgeklärt, warum läßt man die Algebre im Schatten schmachten? Man findet darinn ungemeine Schwierigkeiten; man sieht nicht ab, was sie für Nutzen schaffen könne; sie schadet der Gesundheit; sie macht ihre Vertrauten im Kopfe verrücket, und im geselligen Leben unerträglich. Dahin beziehn sich nun alle Beschuldigungen, um deren willen viele Gelehrten, die Algebre für verwerflich halten.

Aber würde ich den Stolzen, welche diese Einwürfe machen, nicht zu viel Ehre anthun, wenn ich sie widerlegte? Vermengen sie nicht offenbar die Leh-

ren der Algebre mit ihrem Misbrauche? So will ich es also bloß in der Absicht wagen, damit ich dabey Gelegenheit habe, den unvergleichlichen Werth dieser edlen Wissenschaft zu bestimmen.

Man findet in der Algebre ungemeine Schwierigkeiten. Gesetzt nun, dieser Vorwurf wäre nicht allerdings falsch: was anders läßt sich daraus nach den Gesetzen einer gesunden Vernunftlehre schließen, als daß man diese Schwierigkeiten überwinden soll. Es ist in der That eine allgemeine Eigenschaft der Wissenschaften, daß sie mit Dörnern umzäunet sind; nur schlechte und verachtungswürdige Sachen werden ohne Mühe gesammelt; das Gold und Silber wird aus dem Eingeweide der Erde mit Schweis gegraben. Ein gleiches Schicksal hat die Wahrheit; wer die Arbeit scheut, findet sie nicht, denn die Natur hat sie tiefer als Silber und Gold verborgen.

Und welches sind endlich diejenigen, denen die Algebre so fürchterlich vorkömmt? es sind vermuthlich Jünglinge, welche weder Fleiß noch Geduld haben: Krankheit, womit nicht selten die aufgewecktesten Geister geplagt werden, und dafür sich doch kein sichereres Mittel, als die Erlernung der Algebre, vorschreiben läßt. Viele Gelehrten haben sich durch ihre geschickte Schriften glücklich bemüht, den Schleyer von der Algebre hinweg zu ziehen, welcher sie so fürch-

terlich

terlich gemacht hat. Die Schwierigkeiten sind nun größtentheils weggefallen, seitdem man angefangen hat, die sämmtlichen Lehren der Algebre in eine systematische Lehrart einzukleiden; sich überall deutlich zu erklären; richtige Gesetze vorzuschreiben; die nöthigen Schlüße und Zwischengleichungen einzurücken, und die Sache von Jahr zu Jahr mit witzigen Erläuterungen in ein größeres Licht zu setzen. Sollte die Algebre bey so schimmerndem Glanze noch zu dunkel irgend einem vorkommen, so wäre solches nicht dem Mangel des Lichts, sondern vielmehr der Blödigkeit der Augen zuzumuthen. Ein Mensch von dieser Art müßte zum Nachdenken ganz ungeschickt und bloß zu Sachen gebauet seyn, welche ohne vielen Zuthun der Seele begriffen werden, und doch hinreichend sind, den Leib mit Ehren zu erhalten. Ich kenne viele Gelehrten aus diesem Geschlechte.

Wir kommen zum zweyten Vorwurf. Man sieht nicht ab, was für einen Nutzen die Algebre schaffen könne. Wie erträglich auch immer diese Sprache unter dem Pöbel seyn kann: so pöbelhaft lautet sie in dem Munde der Gelehrten.

Der Nutzen, der mit der Algebre verknüft ist, beziehet sich hauptsächlich auf zwo Arten. Man hat Nutzen 1) von den algebrischen Wahrheiten selbst, 2) von der Weise, womit sie erfunden werden.

Der Nutzen von der ersten Art ist von einem großen Verhältnißkreise; er ist so weitläuftig, als überhaupt die Vortheile mathematischer Wahrheiten in dem gemeinen Leben seyn können. Hat vielleicht die höhere Geometrie keinen Einfluß in die Glückseligkeit der Sterblichen? aber die Algebre ist der Gipfel der höchsten Geometrie. Empfinden wir vielleicht keine Vortheile aus der Geographie, der Mechanik, der Optik, der Kriegs- und Civilbaukunst? aber alle diese Arten der Wissenschaften sind durch Hülfe der Algebre zu der Erhabenheit, in welcher sie zu unseren Tagen mit voller Pracht erscheinen, gebracht worden. Und welche Vortheile hat die Algebre der Sternkunde zufließen lassen!

Newton war es, der durch die Stärke seiner Algebre das Mittel gefunden, die Bewegung der Körper zu bestimmen, wenn man die Kraft kennt, wodurch sie nach einem gewissen Mittelpunkte getrieben werden. Da er also einmal die Kräfte entdecket hatte, womit die Planeten gegen ihren Mittelpunkt getrieben werden, so war er auch im Stande ihre Bewegung genau zu erklären. In der That sind wir der Algebre das große Licht schuldig, welches wir iezt in der Astronomie finden.

Halbgelehrte, das ist, Leute, welche die Wissenschaften aus Bücherregistern gelernet haben, schrän-

ken den Nutzen der Algebre auf die bloße Auflösung vorwitziger Aufgaben ein. Dieses nun erweckt in ihren ernsthaften Seelen die Verachtung gegen die Algebre. Zu der Verachtung, welche aus falschem Wahne fleußt, schlägt noch ein Verdruß hinzu, welcher in der menschlichen Eigenliebe seinen zureichenden Grund hat. Sie sehen wohl ein, daß sie bey allen ihren Kenntnissen noch eine Art der Unwissenheit bekennen müssen, weil sie nicht im Stande sind einen gedruckten algebrischen Beweis, den viele andere Menschen lesen und begreifen, einmal richtig zu buchstabiren. Daher haben sie einen Staatsstreich erfunden, auf einmal aus der ganzen Sache zu kommen. Sie geben die ganze Algebre für ein Hirngespinnst aus, welches wegen anderer wichtigern Wahrheiten, die in der Welt vorkommen, keine Achtung verdient.

Ach! daß unter einer solcher Menge denkender Wesen, so wenig zu finden sind, welche für die Wahrheit wider die Leidenschaften denken. Die Auflösung vorwitziger Aufgaben ist ja eine der geringsten Beschäftigungen eines Algebristen, folglich nicht der einzige Gegenstand, worauf man bey Erlernung der Algebre sein Augenmerk richten soll. Nein; das Reich der Algebre ist von einem ausgebreitetern Umfang, als mancher Fremdling denken kann. Woher holet wohl der größte und schönste Theil natürlicher Wissenschaf-

ten seine Nahrung, seine Gewißheit, seinen Glanz? von der Algebre. Sie selbst als eine Königinn glänzt mit keiner entlehnten Pracht, und dient mit ihrem Reichthume vielmehr anderen Wissenschaften, als sich selbst. Was vermag die Seele eines wahren Weltweisen zu entzücken? die Naturlehre. Wem hat die Naturlehre ihr Ansehen zu danken? der Geometrie. Wodurch ist die Geometrie zur Vollkommenheit gebracht worden? durch die Algebre. Man lasse uns diese Begriffe deutlicher machen.

Diophantus, ein Mathematiker aus Alexandrien, soll die Algebre erfunden haben. Er lebte nach den Zeiten des Ptolomäus; aber das Alterthum hatte die Vorzüglichkeiten der Algebre nicht eingesehen. Es hatte allen Witz und Scharfsinn verschwendet, um ihre Logik und Metaphysik in ein schimmerndes Ansehen zu bringen; so aber blieb die Naturlehre desto dunkler und kriechender. Kaum die witzigsten Köpfe unserer Zeiten sehen sich im Stande, die Physik und Metaphysik der alten Schulweisen auseinander zu setzen. Die Erhabenheit ihrer Erfindungen wird bewundert, aber nicht genützet; denn ich habe es sonst auch wahrgenommen, daß diejenigen Sachen, worinn der menschliche Verstand und Witz am glänzendsten erscheinen, eben nicht die allernützlichsten sind; welches ohne Zweifel in der Unwissenheit richtiger Anwendungen, oder sonst in einem Schicksale der Sterblichen

seinen Grund haben muß. Nur die Algebre verdient davon ausgenommen zu werden. Sie ist in der That die erhabenste Kunst Wahrheiten zu erfinden; sie ist der Gipfel menschlicher Erkenntnisse, und der allervollkommenste Beweis von der Vortrefflichkeit des Verstandes der Sterblichen. Man bewundert sie, aber man nützet sie zugleich.

Des Cartes hatte die Ehre der erste aus den Weltweisen zu seyn, welche die Algebre an die Naturlehre anzuwenden gewust haben. Er hätte die Sache ungemein weiter treiben können, wenn er nicht zu gleicher Zeit ein starker Dichter gewesen wäre. Er gab eingebildete Schäfereyen für wahre Landschaften an, und schrieb einen Roman hin, als er dachte die Naturlehre abzuschildern. Er machte Rechnung ohne Wirth, weil er die Natur ohne den wahren Maaßstab bloß nach einem wahrscheinlichen Gutachten bestimmet hat. Wofern ich nicht irre, so hat dieser einzige Satz seiner Vernunftlehre, daß man an allen zweifeln soll, mehr zur Aufnahme der Weltweisheit beygetragen, als seine ganze würbelichte Naturlehre. Aber auch diese hatte den Enkeln die Augen eröffnet. Man folgte ihm nach, und fuhr fort die Physik mit der Algebre zu verbinden. Newton, dieser unsterbliche Newton! hatte darinn alle Menschen übertroffen. Des Cartes wollte der Natur Gesetze vorschreiben: Newton nahm sie von ihr an. Des Cartes kleidete

die Natur nach französischer Art prächtig und galant: Newton überfiel sie gleichsam im Schlafe, und suchte durch genauere Beobachtung ihrer natürlichen Gestalt die verborgene Heimlichkeiten zu entdecken; so, wie ein schlauer Richter aus den äußerlichen Gesichtszügen von dem heimlichen Verbrechen des Beklagten, und ein Arzt von den verschlagenen Krankheiten zu urtheilen weis. Wollte sich nun die Natur noch nicht bloß geben (denn wer weis es nicht, wie sehr sie sich bemühe, alles zu bergen?) so grief er nach den Zauberbuchstaben $a + x$, beschwur sie damit, und zwang ihr auf diese Art das Bekenntniß der Wahrheit ab. Clairaut, d'Alembert, Boscowich, de la Caille, Euler, o was schöne Geister in der Naturlehre unserer Zeiten! sie haben die Erhabenheit in der Naturkunde, welche wir bewundern, bloß der ungemeinen Tiefe der Algebre, welche nur wenig Menschen ergründen werden, zu danken. Clairaut hatte das Glück die physische Ursach endlich ausfindig zu machen, welche den Kometen im Jahre 1759 in seiner Wiedererscheinung zurück gehalten hatte. Er fand sie in den gegenseitigen Wirkungen der Planeten; aber wie gelangte er unter dieses Geheimniß? nicht anders, als durch den Gebrauch der Algebre.

Wie aber? besitzen die arithmetischen Ziffern diese Zauberkraft nicht? Ich will sie ihnen nicht gänzlich absprechen, zumal da mir nicht unbekannt seyn

kann,

kann, daß die alten Mathematiker vieles ohne Zuthun der Algebre verrichtet haben. Dem ohngeachtet muß ich mich doch allezeit für die Algebre erklären, aus Ursach, weil 1) viele Aufgaben vermittelst der Ziffer keine Auflösung gewinnen, und allein durch Hülfe der Algebre entfaltet werden mögen. 2) In allen Auflösungen die Buchstabenrechnung ungemein kürzer und ebner als die Zahlrechnung befunden wird. 3) Bloß die buchstäblichen Anflösungen gewisse allgemeine Formeln oder Regeln auswerfen, wonach in ähnlichen Fällen unendlich viele Auflösungen gebildet werden mögen. So nach aber sind wir ungemein klüger, als die alten Mathematiker unsre Väter waren? Man erlaube mir nur drey Worte zu sagen. Ist es wohl Wunder, daß ein Kind weiter sieht als der Vater, wenn es auf dessen Schultern getragen wird?

Hat auch die Algebre einen Einfluß in die übrigen Wissenschaften? was diese betrift, so zweifle ich, daß sich unmittelbar durch Hülfe der Algebre ein Rechtshandel schlichten, oder eine Krankheit abtreiben läßt. Aber ich habe hier Gelegenheit die zweyte Art des Nutzens zu entwickeln, welcher aus der Weise fleußt, wodurch die algebrischen Wahrheiten erfunden werden. Die Algebre lehrt uns ganz unvermerkt die Kunst in allen Wissenschaften ordentlich zu denken, und neue Wahrheiten zu erfinden; hat aber dieses keinen allgemeinen Nutzen in den Wissenschaften? Ein

geübter Tonkünstler empfindet gleichsam in seinem innersten Gefühl dasjenige Versehen, wodurch eine aufgeführte Harmonie uneinstimmig gemacht wird: ein algebrischer Gelehrter hat ein gleich zartes Gefühl, aber nur in gelehrten Sachen. Die Nerven seines körperlichen Hebezeuges werden gleichsam erschüttert, wenn irgend einer sich betreten läßt, entweder aus Schwachheit mit einem unverdauten, oder aus Eifer mit einem unzeitigen Schlußsatze eine Bewegung in der Luft zu machen. Ein algebrischer Gelehrter gelanget viel eher zur vollkommensten analytischen Klarheit seiner Begriffe und großen Vollständigkeit derselben; und weil die Urtheile entstehen, wenn man das Verhältniß der Begriffe gegen einander bestimmet, so hat ein algebrischer Philosoph die schönste Gelegenheit Wahrheiten von allen Arten seines Gegenstandes zu finden, und Urtheile zu bilden. Dem zufolge hat er keinen Ansatz zu der Krankheit gewisser Gelehrten, welche Trotz allen Vomitiven dasjenige, was sie gelernet haben, nicht von sich geben können. Einem Algebristen erscheint die Wahrheit viel eher; er folgt ihr, und geht daher in keine Irrwege ab; er läuft keine Gefahr widersprechende Sätze zu behaupten; er spinnt keinen Wortstreit an; er geht die gerade Straße nach dem Tempel der Wahrheit zu.

Aber ihr werdet sagen: diesen Nutzen schaffet die Vernunftlehre auch. Ich gestehe es: die Vernunft-

nunftlehre giebt uns zwar die Gesetze wohl zu denken an die Hand, aber die Algebre lehrt sie wohl anwenden. Die Vernunftlehre zeigt uns die Straße zur Wahrheit, aber die Algebre begleitet uns dahin. Die Kräfte des menschlichen Verstandes hat niemand deutlich schätzen können, der sie nicht geübet hat; und wo treffen wir schönere Gelegenheit an, unser Denkungsvermögen zu prüfen, als in der Algebre?

Lasset uns nun die dritte Klage vornehmen. Die Algebre schadet der Gesundheit. Wie so? entfärbet sie vielleicht das Angesicht? erschöpft sie die Nervensäfte? ruft sie gar etwa dem unzeitigen Tode zu? alles dieses. O! wer wollte nun so thöricht thun, und sich mit einer so traurigen Kunst abgeben? Warum sollte das elende $a = x$ mein Scharfrichter seyn? Aber zu allem Glück verliert die Algebre bey diesem Spötteln nichts von ihrem Werthe. Die heilsamsten Dinge werden zu Gift, wenn man sie mit Uebermaaße brauchen will. Nicht die Algebre, sondern deren Misbrauch kann gewisse Nachtheile der Gesundheit bringen. War nicht Newton ein Algebrist? aber er lebte fünf und achtzig Jahre, und lebte sie bloß zu Diensten der Algebre. War Wolf kein Algebrist? er hatte aber bey der Algebre das höchste Alter erreicht, und hörte nicht eher auf ein Algebrist, als ein Mensch zu seyn. Ich könnte Algebristen bestimmen, welche weder an der Lebhaftigkeit ihres Angesichtes, noch an den Lebensgeistern einigen Mangel leiden; welche stark gebauet sind, und ein ziemlich Verhältniß des Fleisches und der Gebeine vor-

stellen; wiewohl ich zweifle, daß der bloße Gebrauch algebrischer Quantitäten ein thierisches Wesen zu mästen geschickt sey.

So gewiß ich nun überzeugt bin, daß der vernünftige Gebrauch der Algebre keinen schädlichen Einfluß in das Leben der Menschen und ihre Gesundheit hat, so befremdlich klingt auch in meinen Ohren der letzte Vorwurf, daß die Algebre ihre Vertrauten im Kopfe verrücket, und im geselligen Leben unerträglich mache. Dreuster Vorwurf! sollte ich durch vieles Kopfbrechen darum ein Algebrist geworden seyn, damit ich mir muthwillig die Nothwendigkeit zuziehe, einst den Kopf curiren zu lassen, und meine algebrische Seele in dem Hospitale der Weisheit aufzugeben? Nein! ich bin mir allein nicht gebohren; das Weltganze, dessen Bürger ich bin, macht billige Ansprüche auf meine Verdienste. Aber wie glücklich bin ich doch, daß ich noch die Einsicht besitze, die Pflichten eines Bürgers mit dem Charakter eines Algebristen zu verbinden! Beyde beschäftigen sich mit Finden; jener sucht die Wohlfahrt, dieser die Wahrheit; ist aber die Wahrheit bey der Wohlfahrt unerträglich? wie wenig Bürger nun aus Eifer für das allgemeine Beste einen Verstoß in ihrem Gehirne empfinden, so seltsam würde es aussehen, wenn in dem Kopfe eines Algebristen etwas verrückt werden sollte. Mir ist gegenwärtig kein Mechanismus von dieser Art bekannt; was in Zukunft geschehen dürfte, wird die Zeit bestimmen. Dieß ist indessen gewiß, daß eine Hauptverrückung

ckung von dieser Art unverbesserlich wäre; denn man würde, um das Verrückte wiederum in die alten Fugen zu bringen, unumgänglich einen algebrischen Mechaniker fordern wollen; und wo läßt sich dieser finden?

Ein schöner Gedanke ist es auch, wenn man sich einfallen läßt, daß die Algebristen Geschöpfe sind, die man im geselligen Leben nicht wohl vertragen kann. Aber ich hoffe die Quelle dieses Vorurtheils in dem falschen Brgriffe des geselligen Lebens zu finden. Was verstehn dann diese Leute, welche dergleichen Vorwürfe machen, durch das gesellige Leben? verstehn sie vielleicht jene Zünfte der Bürger, welche von allem Staats- und Kriegswesen gehöret haben, und wenn sie sich zu Abendstunden bey einer Bank versammeln, wenigstens eine Stunde lang von verschiedenen Eigenschaften ausländischer Biere einen lauten und fortdaurenden Schall in ihrem Dunstkreiße hervor zu bringen wissen? Nennen sie etwa das gesellige Leben eine gemeinschaftliche Handlung mit jener Gattung der Menschen, welche in ihrer Denkungsart schlecht und ungebunden, in ihren Gesprächen eitel und unbescheiden, in ihrem Wandel nichts dann Spieler, Fechter und Luftspringer sind? Bey solchen Fällen muß ich gestehen, daß sich ein Algebrist schwerlich in das gesellige Leben finden würde, vielleicht darum, weil die Algebristen, schon in ihren Lehrjahren zur stillen Sittsamkeit gestimmet, Feinde der flatterhaften Gaukeleyen sind. Sie lieben und suchen die Ruhe der Seele; daher es dann kömmt, daß sie wenig sprechen

und viel denken. O was Vortheile für glückliche Erziehung der Kinder!

Wollte man aber durch das Wort geselliges Leben die Gesellschaft wackerer und rechtschaffener Bürger bedeutet wissen, so halte ich gänzlich dafür, daß die Algebristen darinn nicht allein erträglich, sondern auch angenehm und nützlich sind. Die Uhren gehören ja zu den nützlichsten Erfindungen für das gemeine Leben, so wenig Geräusche sie auch in der Welt erwecken; aber wenn die Uhr einen lauten Ton von sich giebt, so hat es allemal etwas zu bedeuten. So sind die Algebristen. Im Gegentheil sollte man dasjenige Geschlecht der Galanten, welche bey schlechtem Vermögen des Mutterwitzes mehr mit der Zunge, als dem Kopfe arbeiten, mit einem leeren Wagen vergleichen, welcher von muthigen Pferden über die Straßen der Stadt mit gewaltigem Getümmel fortgerissen, nur ein lächerliches Aufsehen zuwege bringt.

Wie aber? verdiene ich nicht einen neuen Vorwurf, daß ich die wider die Algebre eingestreuten Vorwürfe so weitläuftig geprüft habe? Noch sey mir erlaubt, meine Algebre in Tabellen mit einer eignen Vorrede zu begleiten,

Man wird vermuthlich wissen wollen, warum ich diesen algebrischen Aufsatz niedergeschrieben? für welche Gattung der Menschen? und warum mit so vielen Anmerkungen? Das erste bin ich niemanden schuldig zu melden. Das zweyte steht auf dem Titelblatte. Das dritte wird sich aus den Anmerkungen selbst errathen lassen.

Allge-

Allgemeine Tabelle
über die Algebre.

I. Hauptstück. Erkenntniß der Größen.

II. Hauptstück. Veränderung der Größen.

A. Indem man sie verwandelt

durch die Reduction;

B. Indem man sie größer machet
1) durch die Addition,
2) durch die Multiplication.

C. Indem man sie kleiner machet
1) durch die Subtraction,
2) durch die Division.

D. Indem man sie zusammensetzet

durch die Zeugung der Potenzen.

E. Indem man sie auflöset
1) durch die Ausziehung der Wurzeln;
2) durch die Berechnung der Wurzelgrößen; als
a) durch die Reduction der Wurzelgrößen.
b) durch die übrigen Species in Wurzelgrößen.

III. Hauptstück. Vergleichung der Größen.

A. Von einerley Art; durch

1) Verhältnisse.

2) Proportionen.

3) Progreßionen.

B. Von vermischten Arten; durch

1) die algebrischen Aufgaben überhaupt; wobey gesehen wird

a) Auf die Benennungskunst.

b) Auf die Gleichungskunst.

c) Auf die Ausführungskunst.

2) Besondere algebrische Aufgaben; nämlich

a) welche einfache Gleichungen haben.

b) Welche befaßte Gleichungen enthalten.

Er-

Erstes Hauptstück.

Von der Erkenntniß der Größen.

Erste Tabelle.

Von dem Wesen und den verschiedenen Arten der Größen.

A. Erklärung der Größe.

Eine Größe wird genennt, was sich vergrößern oder verkleinern läßt. Z. B. die Zahl, die Linie, der Raum, die Zeit, die Geschwindigkeit, die Kraft, die Schwere, der Schall, das Licht ꝛc.

B. Arten der Größen.

1) Bekannte Größen. Man drückt sie mit den ersten Buchstaben des kleinen Alphabeths aus. Z. B. *a*, *b*, *c*, *d*, ꝛc.

2) Unbekannte Größen. Werden mit den letzten Buchstaben des kleinen Alphabeths angegeben: *z*, *y*, *x* ꝛc.

3) Wirkliche Größen (quantitates positivae); welche größer als nichts, „

4) Verneinende Größen (quantitates negativae); welche kleiner als nichts sind; diese werden mit einem Strichlein —, jene mit einem Kreuzlein + bezeichnet. (1 Anmerkung.)

5) Einfache Größen (simplices); welche mit einem Buchstabe „

6) Zusammengesetzte Größen (compositae); welche mit angehäuften Buchstaben angesetzt sind. Von der ersten Art sind *a*, *b*, *c*; von der letzten: *aa*, *ab*, *abc*.

7) Ungebundne Größen (incomplexae); welche weder mit + verknüpfet, noch durch — von andern Größen getrennet sind. Z. B. *a*, *ab*, *bbb*.

8) Gebundne Größen (complexae); welche auf diese Art verknüpfet oder getrennet sind. Z. B. $a+b$; $bb-a$. (2 Anmerk.)

9) Aehnliche, gleichnamige Größen (similes, homogeneae); welche mit eben denselben Buchstaben „

10) Unähnliche, ungleichnamige Größen (dissimiles, heterogeneae); welche mit verschiedenen Buchstaben angegeben werden. Von der ersten Art sind *a* und 2*a*; von der letzten: *a* und *b*, oder *a* und *aa*. (3 Anmerk.)

11) Gleiche Größen (aequales); welche ohne Veränderung ihres Werths für einander genommen werden können.

12) Ungleiche Größen (inaequales); welche dieses Bedingniß nicht haben. (4 Anmerk.)

13) Coefficienten, mitwirkende Zahlen, werden diejenigen Zahlen genennt, welche zur Linken einer algebrischen Größe angeschrieben sind. Z. B. 2*a*, 3*bc*, 14*x*. Sie zeigen an, wie vielmal diese Größen genommen werden sollen. (5 Anmerk.)

14) Er-

14) Exponenten, sind gemeiniglich Zahlen, welche zur Rechten einer algebrischen Größe angesetzt sind. Sie geben an, wie vielmal diese Größe hintereinander geschrieben werden müßte, im Fall man keinen Gebrauch von Exponenten machen wollte. Also wird a^2 anstatt aa; und a^3 anstatt aaa hingeschrieben. (6 Anm.)

C. Erklärung der Algebre.

Die Algebre, in einem ausgebreitetern Verstande genommen, ist eine allgemeine Rechenkunst, oder eine Wissenschaft der Größen überhaupt; in einem engern Verstande aber heißt sie eine Wissenschaft aus gegebenen und bekannten Größen, die unbekannten durch Hülfe der Gleichungen zu finden. Was eine **Gleichung** sey, wird an seinem Orte vorkommen. (7 Anm.)

Anmerkungen.

1. Es kostet Mühe und Geduld, klare und deutliche Begriffe von dem Wesen einer **verneinenden** Größe den Scholaren beyzubringen. Wenn man tausend Thaler ohne Schulden besitzet, so hat man gewißlich etwas wirkliches, und mehr dann nichts; folglich wären unsere tausend Thaler eine **wirkliche** Größe. Wer tausend Thaler besitzt, und eben so viel schuldig ist, dieser hat nichts: denn die Schuld tilget das Vermögen. Wer endlich tausend Thaler im Vermögen hat, und fünf tausend Thaler schuldig ist, dieser hat vier tausend Thaler weniger als nichts: dieses nun würde eine verneinende Größe seyn. Es läßt sich demnach wohl begreifen, daß es nicht ungeschickt wäre, wenn man die wirklichen Größen durchgehends als baar Geld, die verneinenden hingegen nicht anders als Schulden ansehen wollte.

Eine verneinende Größe besitzet so wie die wirkliche das Hauptkennzeichen der Größe, welches darinn besteht, daß sich ein Ding vergrößern oder verkleinern läßt.

Die Zeichen + und — bekommen von den Größen, welchen sie vorgesetzt sind, ihre Benennung. So nach wird + ein **wirkliches** und — ein verneinendes Zeichen genennet.

Den Schülern pflegen die Buchstaben *a*, *b*, *c*; *z*, *y*, *x* 2c. wo nicht befremdlich, gewißlich dunkel vorzukommen; warum? es will sich nicht gleich anfangs begreifen lassen, was sie eigentlich vorstellen sollen. Diesen Nebel zu zerstreuen, bildet euch ein, daß die Buchstaben Zeichen unbestimmter Größen sind. Gleichwie nun die Zahlen 1, 2, 3 für sich selbst an dem Begriffe einer gewissen Größe, z. B. des Geldes nicht gebunden, sondern dergestalt abgezogen und allgemein sind, daß man sie durchgehends zu Berechnung einer jeden Größe bestimmen und anwenden kann: also lassen sich auch die Buchstaben in algebrischen Rechnungen zu allen Begriffen der Größen gebrauchen. Und gleichwie die Zahlen, eh man sie mit unseren Begriffen verbindet, allgemein sind, und alles, was zählbar ist, angeben: auf gleiche Weise bedeuten die Buchstaben, eh man sie an gewisse Arten der Größe anwendet, überhaupt alle Gattungen der Größen. Hieraus läßt sich nun die Ursache leicht errathen, warum die Algebre eine **allgemeine Rechenkunst** genennet wird.

2. Man muß schlechterdings annehmen, daß das erste Glied einer gebundenen Größe, auch eine jede ungebundene Größe, insofern dieselbe mit keinem ausdrücklichen Zeichen versehen ist, eine **wirkliche** Größe sey.

Dem=

Demnach will $a - b$ so viel als $+ a - b$, und a so viel als $+ a$ sagen.

Man gewöhne sich an, die Zeichen, wodurch die gebundnen Größen mit einander verknüpfet, oder von einander getrennet sind, geschickt auszusprechen. Die Größe $a + b - c + 2\,c\,d$ dürfte in der algebrischen Mundart also lauten: a mehr b weniger c mehr $2cd$.

3. Der Aehnlichkeit der Größen schadet die Verschiedenheit ihrer Zeichen oder Coefficienten nicht; wohl aber die Verschiedenheit der Exponenten. Beydes kann aus der Natur sowohl der Coefficienten als der Exponenten erwiesen werden. Diesemnach sind a und $2a$ ähnliche, $2a$ und a^2 unähnliche Größen.

4. Zwo gleiche Größen werden durch zween unter einander gezogene Striche $=$ angemerket. Man spricht die nachstehende Gleichung $a + a = 2a$ also aus: a mehr a ist gleich zweyen a. Unter den ungleichen Größen wird die kleinere mit der Spitze eines gefällten Winkels $<$, die größere aber mit dessen Oeffnung $>$ angemerkt. Man spricht die nachstehenden Größen $a < 2a$ also aus: a ist kleiner als $2a$; $2a$ sind größer dann a. Größen, die unendlich groß sind, führen das Zeichen ∞ bey sich.

5. Es ist noch folgendes nachzuholen: die Größen, wobey kein Coefficient ausdrücklich angeschrieben ist, haben den Einer zum Cofficienten. Demnach ist a so viel als $1a$; und aa so viel als $1aa$.

6. Keine Größe kann ohne den Exponenten gedacht werden; folglich haben alle Größen, die eines offenbaren Exponenten beraubet sind, den Einer zum Exponenten: ab sagt so viel als $a^1\,b^1$; und $abcc$ so viel als $a^1\,b^1\,c^2$. Hieraus erhellet nun, daß man sich hüten soll, den Exponen-

ponenten mit dem Coefficienten zu vermengen; sie sind in Rücksicht auf ihre Bedeutung allerdings unterschieden; denn z. B. $2a$ wird anstatt $a+a$, a^2 aber anstatt aa, d. i.: $a \times a$ angesetzt. Jngleichen wird $4b$ anstatt $b+b+b+b$, b^4 aber anstatt $bbbb$ genommen.

7. Einige Grammatiker wollen das Wort Algebre vom Geber, einem arabischen Gelehrten: andere von dem arabischen Worte Gabir, welches den Werth bedeutet, hergeleitet wissen. Herr von Wolf hatte einen artigen Gedanken über das Abstammen der Algebre; aber uns ist an der Herleitung nichts gelegen.

Zweytes Hauptstück.

Von der Veränderung der Größen.

Zweyte Tabelle.

Von der Reduction der Größen.

A. Erklärung der Reduction.

Reduciren heißt die Glieder einer gebundnen Größe ohne Veränderung ihres Werthes auf eine geschickte, und, so weit es thunlich ist, die einfachste Art ausdrücken. (8 Anm.)

B. Gesetze der Reduction.

I. Man setze die Glieder der gebundnen Größen und ihre Buchstaben, so weit es thunlich ist, nach der Reihe des Alphabeths an.

Z. B. Die nachstehende gebundne Größe $ec+ad+ba+a-c$ gewinnt durch Hülfe der Reduction diese Ordnung: $a+ab+ad-c+ce$.

II Man ziehe die ähnlichen Glieder einer gebundnen Größe in eines zusammen; oder im Falle, worinn ein Glied das andere aufhebt, lasse beyde aus. Dieß Gesetz läßt sich überhaupt auf drey Fälle anwenden.

1) Wenn die ähnlichen Glieder einerley Zeichen haben.

In diesem Falle ziehe man alle Glieder in eines zusammen: behalte das gemeinschaftliche Zeichen bey: und mache den Coefficienten des zusammen gezogenen neuen Gliedes der Summe der einzelnen Coefficienten gleich. (9 Anmerk.)

Z. B. anstatt
$ab+cd+cd$ schreibe hin: $ab+2cd$
$ab+3ab-cd$: : $4ab-cd$
$ab-4cd-5cd$: : $ab-9cd$

2) Wenn die ähnlichen Glieder wiedrige Zeichen haben.

Dießfalls subtrahire man den kleinern Coefficienten von dem größern, und gebe den Rest mit dem Zeichen des größern an. (10 Anm.)

Z. B. anstatt
$ab+4bc-bc$ schreibe hin: $ab+3bc$
$ab-4bc+bb+3bc-2bb$: $ab-bb-bc$
$ab+2bc-3ab-4bc$: : $-2ab-2bc$

3) Wenn die ähnlichen Glieder wiedrige Zeichen und gleiche Coefficienten haben.

Alsdann werden solche Glieder durchgehends ausgelassen.

z. B. anstatt	$ab - 4bb + 4bb + 3c$	schreibe hin:	$ab + 3c$
	$ab + 3ac - ac - 2ac$	: :	ab
	$2cd - ccd - 2cd$	:	$-ccd$
	$5f^2 m^3 + l - 5f^2 m^3$	: :	l.

(11 Anmerk.)

Anmerkungen.

8. Demnach kömmt alles, was bey der Reduction der Größen vorfallen kann, auf die nachstehenden zwey Hauptstücke an, nämlich 1) auf ächte Stellen der Größen; 2) auf den einfachsten Ausdruck der Größen.

9. Man muß einen Anfänger in der Algebre nichts überreden, dessen Grund man nicht zugleich angeben kann. Worauf gründet sich nun die Richtigkeit der Zusammenziehung ähnlicher Größen? gewißlich auf diesen geometrischen Grundsatz: **Alle Theile des Ganzen machen das Ganze selbst aus; und: Das Ganze ist allen seinen Theilen gleich.** Woraus zu schließen, daß, im Falle man die ähnlichen Glieder einer gebundnen Größe als ihre Theile ansehen will, die Reduction für eine Art des Summirens zu achten sey.

10. Dieser und der folgende letzte Fall beziehn sich auf den allgemeinen Grundsatz: **Wenn eine Größe angesetzt und wiederum hinweggenommen wird, bleibt nichts übrig.** Denn hieraus erhellet ganz deutlich, daß im Falle sich ein wirkliches Zeichen +, und ein verneinendes — auf eben dieselbe Größe beziehen sollten, sie einander gänzlich oder nur zum Theile tilgen würden, nachdem die Coefficienten einander gleich oder ungleich wären. Nach diesem Grundsatze, welcher zugleich ein allgemeiner Grundsatz aller menschlichen

lichen Kenntnisse ist, werden die meisten algebrischen Wahrheiten geprüfet und bewiesen.

11. Die Reduction der Größen ist einer der wichtigsten Gegenstände in der Wissenschaft der Algebre, man muß davon beynahe in allen vorkommenden Operationen Gebrauch machen. Demnach will es sich geziemen, daß die Anfänger den Schritt nicht tiefer wagen, sie haben dann durch fleißige Uebung einige Fertigkeit darinn erlanget. Die nachstehenden Beyspiele enthalten die gemeinsten Fälle der Reduction.

Man soll reduciren

$3ca + a^2 d - dba - d^2 ba^2 + 5xb + axc - rnm - 7ab$

$bac^2 - 5qmd - 3cbf + daf - 4eacd.$

$ab + 4cde + aab + ab + aab + cde.$

$4c - 3df - ab + 3c - df - 4ab.$

$7de - de + 3bcc + cd - 2bcc - 4cd.$

$aaa + aa - 3a^3 - 4aa + 2a^3 - 2a^2.$

$ef - 4ef + 24ab + ab - 4c - 2ab.$

$cd^2 + 8c^2 d - cd^2 - 2c^2 d - 6c^2 d.$

Dritte Tabelle.

Von der Addition und Multiplication der Größen.

I. Addition.

A. Erklärung des Addirens.

Addiren heißt zwo oder mehrere Größen von einerley Art in ein Ganzes, welches man die Summe nennt

nennt, zusammenziehn. Das Zeichen der Addition ist ein Kreuzlein $+$.

B. Gesetze der Addition.

Man schreibe die Posten in einer ståten Reihe an:
: lasse ihre Zeichen unverändert:
: reducire sie.

C. Beyspiele.

a) In ungebundnen Größen.

a zu a giebt $a+a$; oder nach geschehen. Reduct. $2a$.
$-b$ zu $-3b$ giebt $-b-3b$: : : $-4b$.
(12 Anm.)
$-2a$ zu $4a$ giebt $-2a+4a$; : : $2a$.
(13 Anm.)
$2bc$ zu bc giebt $2bc+bc$: : $3bc$.

b) In gebundnen Größen.

$a+b$ zu $3a-2b$ giebt $a+b+2a-2b$; oder nach geschehener Reduction, $4a-b$.

$a-b+c-2d+3e$ zu $3a+2b-c+d-e+f$ giebt

$a-b+c-2d+3e+3a+2b-c+d-e+f$; oder nach geschehener Reduction, $4a+b-d+2e+f$.

c) In Größen mit Exponenten.

a^2 zu $2a^2$ giebt $3a^2$; $4a^3$ zu a^4 giebt $4a^3+a^4$.
a^4 zu $4a^4$: $5a^4$; $a^2b+3a^2b^2$ zu $2a^3b$ giebt:
$a^2b+3a^2b^2+2a^3b$.

II. Multiplication.

A. Erkärung des Multiplicirens.

Multipliciren heißt eine Größe finden, welche anzeigt, wie viel die eine gegebne ausmacht, wenn man sie

sie so vielmal ansetzt, als viel Einheiten die andere Größe hat. Dessen Zeichen sind (×) oder (.). (14 Anm.)

B. Namen der Größen im Multipliciren.

Die Größe, welche mehrernmal gesetzt werden soll, heißt Multiplicandus.

Die Größe, welche anzeigt, wie vielmal die andere gesetzt werden soll, heißt Multiplicator. Beyde werden auch Factoren genennt.

Die gefundne Größe heißt Factum oder Product.

C. Gesetze der Multiplication.

I. In Ansehung der Buchstaben. Man hängt einen Buchstaben an den andern in alphabethischer Reihe, ohne ein Zeichen darzwischen einzuschalten. (15 Anm.)

Z. B. $a \times a = aa$ (16 Anm.); $a \times bc = abc$; $abc \times d = abcd$.

II. In Ansehung der Zeichen. Dieselben Zeichen der Factoren geben ein wirkliches, wiedrige Zeichen geben ein verneinendes Product. (17 Anm.)

Z. B. $+a \times +b = +ab$
$+a \times -b = -ab$
$-a \times +b = -ab$
$-a \times -b = +ab$.

III. In Ansehung der Coefficienten. Man multiplicirt sie mit einander.

Z. B. $2a \times 3a = 6aa$; $2b \times -b = -2bb$.

IV. In Ansehung der Exponenten. 1) Wenn die Factoren von einerley Wurzel gezeugt sind: so addire man ihre Exponenten: schreibe ihren Buchstaben nur einmal hin:

hin: setze die Summe der Exponenten diesem Buchstabe oben an. (18 Anm.)

Z. B. $a^3 \times a = a^4$; $a^4 \times a^3 = a^7$; $b^2 \times b^2 = b^4$; $bc^3 \times b^3 c = b^4 c^4$.

2) Wenn die Factoren von verschiedenen Wurzeln gezeugt sind, so setze man sie hintereinander in alphabetischer Reihe hin.

Z. B. $a^2 \times b^3 = a^2 b^3$; $b^2 \times c^2 = b^2 c^2$; $4a^2 c^4 \times -b^3 d^5 = -4a^2 b^3 c^4 d^5$.

V. In Ansehung der gebundnen Größen. Man multiplicire nach obigen Vorschriften jedes Glied des Multiplicandus mit jedem Gliede des Multiplicators, und ziehe sie dann vermittelst der Addition in eine Summe zusammen.

Z. B. $2a + b + c$ Multiplicandus.
$3a + f$ Multiplicator.

$$\begin{array}{l} 6a^2 + 3ab + 3ac \\ \qquad\quad 2af + bf + cf \\ \hline 6a^2 + 3ab + 3ac + 2af + bf + cf \end{array}$$ Product.

(19 Anmerk.)

Anmerkungen.

12. Es kostet kein sonderliches Kopfbrechen den Beweis von der Richtigkeit dieses Verfahrens zu stellen; nur hat man vonnöthen, sich des in der 9 Anmerkung angebrachten Grundsatzes zu erinnern; man wird daraus vermittelst eines Vernunftschlußes leichtlich den Zusatz herleiten können, daß, wenn ein wirkliches zum wirklichen, oder ein verneinendes zum verneinenden addirt werden soll, in der Summe so viel wirkliche oder verneinende Größen ausfallen müssen, als Einheiten in den Posten ent-

enthalten sind. Diesemnach wird die Summe a zu a keine andere als $2a$, und von $-b$ zu $-3\,b$ keine andere, als $-4b$ seyn können.

13. Um sich von der Richtigkeit dieser Auflösung zu überzeugen, gehe man an die 10 Anm. zurück. Der dahin eingerückte Grundsatz läßt uns verstehen, daß 1) wenn eine verneinende Größe zu der wirklichen addirt werden soll, von der verneinenden Größe so viele wirkliche Größen aufgehoben werden, als viele Einheiten in ihr enthalten sind; 2) wenn eine wirkliche Größe zur verneinenden addirt werden soll, bey der verneinenden so viel getilget wird, als viel die Einheiten der wirklichen Größe betragen. Beydes wird mit den Zahlen begreiflicher gemacht. $+4$ zu -2 giebt lediglich $+2$; und -4 zu $+2$ so viel als -2; das ist: 4 Thaler am baaren Gelde, und 2 Thaler an paßiver Schuld ist ein Vermögen von 2 Thalern; im Gegentheile 4 Thaler an paßiver Schuld, und 2 Thaler am baaren Gelde ist ein Unvermögen von 2 Thaler Schuld.

14. Demnach a durch b multipliciren, will nichts anders sagen, als das a so vielmal setzen, als viele Einheiten in b enthalten sind.

15. Weil die algebrischen Größen von einer gewissen und bestimmten Stelle keinen gewissen und bestimmten Werth gewinnen, wie es bey den Zahlen geschieht, wobey die letzte die Einer, die vorletzte die Zehner rc. bedeutet: darum könnte man die Buchstaben in dem Producte ohne Veränderung des Werths entweder vor- oder nachsetzen, folglich das Product aus a in b mit ab oder ba angeben. Doch ist die alphabetische Reihe die gebräuchlichste. Diese Anmerkung kann durchgehends auf alle Operationen in gebundenen und ungebundenen Größen mit angewendet werden.

16. Wenn

16. Wenn eine Größe durch sich selbst multiplicirt wird, z. B. a durch a, oder aa durch aab, so kann man um der Kürze willen einen Gebrauch der Exponenten machen, und in dem Producte anstatt aa nur a^2, und anstatt $aaaab$ nur $a^4 b$ hinschreiben. Daß man die Exponenten mit den Coefficienten nicht vermengen, folglich die beyden Ausdrücke: a^2 und $2a$ für gleichgültig nicht ansehen darf, haben wir oben (6 Anm.) erinnert; hier wollen wir ihren Unterschied handgreiflich darthun. Bildet euch ein, es sey $a=6$, so ist $a^2=a\times a=6\times 6=36$

: : $2a=a+a=6+6=12$

Bey dem Multipliciren kommen drey Fälle vor. Denn man multiplicirt entweder + mit +, oder — mit —, oder endlich + mit —. In diesen Fällen geben einerley Zeichen +, verschiedene Zeichen aber — im Producte. Wie gehet das zu? Lasset uns annehmen, + hieße adfirmo, und — hieße nego; so heißt dann + mit + multipliciren: adfirmo me adfirmasse; diesemnach ist $+\times+=+$. Wenn — mit — multipliciret wird, so heißt dieses einen Mangel leugnen, negare se negasse. Wer aber leugnet, daß er geleugnet habe, der bejahet; wird also $-\times-$ wohl etwas anders als — ausmachen können? Wenn man + mit — multiplicirt, so nimmt man einen Mangel etlichemal. Wer wollte aber zweifeln, daß im vervielfältigten Mangel ein wahrer Mangel sey? Oder grammatikalisch davon zu sprechen, so heißt + mit — multipliciren: adfirmare se negasse. Wer aber behauptet, daß er geleugnet habe, der leugnet; demnach ist $+\times-=-$. Die Logikkundigen werden sich solche Art des Beweises gefallen lassen.

18. Dieses Verfahren findet auch statt, wenn eine Größe mit keinem ausdrücklichen Exponente versehen ist;

ist; aus Ursach, weil in diesem Falle der Einer für den Exponenten angenommen werden muß.

Nicht selten pflegt das Product aus gebundenen Größen wegen der allzuvielen Glieder der Factoren so groß anzuwachsen, daß man eine Unordnung im Reduciren zn befürchten hat. In diesen Fällen nun wird die Multiplication nicht ausgeführt, sondern bloß durch gewisse Merkmaale angezeiget; dieses geschieht hauptsächlich auf zwo Weisen: 1) Wenn man zwischen den beyden Factoren das Multiplicationzeichen × oder (.) einschaltet, und darüber einen Strich machet. Sonach könnte das Product der nachstehenden Factoren $2a + c - 3d^2$, und $ab + b^2c - d$ also angemerket werden: $\overline{2a + c - 3d^2} \times \overline{ab + b^2c - d}$. 2) Wenn man die beyden Factoren in besondere Klammern einschränket; z. B. $(2a + c - 3d^2)$ $(ab + b^2c - d$. Mehrere Arten können in gelehrten Büchern nachgeschlagen werden.

Vierte Tabelle.

Von der Subtraction und Division der Größen.

I. Subtraction.

A. Erklärung des Subtrahirens.

Subtrahiren heißt einen oder mehrere Theile von dem Ganzen abziehen. Das Zeichen der Subtraction ist ein Strichlein —.

B. Namen der Größen im Subtrahiren.

Das Ganze, wovon die Abziehung geschieht, heißt Minuendus. Der Theil, welcher abgezogen wird, Sub-

trahendus. Die übergebliebene Größe Residuum, Rest, Differenz, das Uebergebliebene.

C. Gesetze der Subtraction.

Man setze den Minuendus und den Subtrahendus in einer stäten Reihe an: Man verändere in dem Subtrahendus das Zeichen; nämlich das + in —, und das — in +; (20 Anm.) Reducire sie.

D. Beyspiele.

I. In ungebundnen Größen:

b subtrahirt von $a = a - b$

ab : : $2ab = ab$

$-a$: : $a = 2a$

a : : $a = 0$

II. In gebundnen Größen:

$a + b$ subtrahirt von $a + b + c = c$

$2b - c$: : $a - 2c = a - 2b - c$ (21 Anm.)

III. In Größen mit Coefficienten:

a^3 subtrahirt von $4a^3 = 3a^3$

a^2 : : $4a^3b = 4a^3b - a^2$

$b^3c^2 - d^2$: $a^2b^3c^2 + d^2 = a^2b^3c^2 - b^3c^2 + 2d^2$

II. Division.

A. Erklärung des Dividirens.

Dividiren heißt eine Größe von der andern so viel mal hinwegnehmen, als viel Einheiten eine dritte Größe enthält. Dessen Zeichen sind zween Puncte (:).

B. Namen der Größen im Dividiren.

Die Größe, welche hinweg genommen wird, heißt Divisor.

Die Größe, von welcher der Divisor hinweg genommen wird, heißt Dividendus.

Die Größe, welche anzeigt, wie oft der Divisor von dem Dividendus hinweg genommen worden, heißt Quotus oder Quotient.

C. Gesetze der Division.

I. In Ansehung der Buchstaben. Man unterstreiche den Dividendus mit einer geraden Linie, und setze den Divisor darunter in Gestalt eines Bruchs. Z. B. $a:b=\frac{a}{b}$; dann merke man auf folgende drey Fälle.

1) Wenn Dividendus und Divisor allerdings gleiche Größen sind, schreibe man den Einer zum Quotienten $\frac{a}{a}=1$; $\frac{a^2bc}{a^2bc}=1$.

2) Wenn Dividendus und Divisor nur zum Theile gleich sind, werfe man die gleichen Buchstaben hinweg; der Rest macht den Quotienten aus $\frac{abc}{c}=ab$.

3) Wenn sie allerdings unähnlich sind, wird nichts vorgenommen $\frac{ab}{de}=\frac{ab}{dc}$

II. In Ansehung der Zeichen. Dieselben Zeichen in dem Dividendus und Divisor geben einen wirklichen; verschiedene Zeichen einen verneinenden Quotienten.

$\frac{+}{+}=+$; $\frac{+}{-}=-$; $\frac{-}{+}=-$; $\frac{-}{-}=+$. (22 Anm.)

III. In Ansehung der Coefficienten. Hier kommen zween Fälle vor:

1) Wenn die Coefficienten gleich sind: werden beyde weggelassen: $\frac{2ab}{2c} = \frac{ab}{c}$.

2) Wenn sie ungleich sind: werden sie mit einander dividirt, im Falle die genaue Division statt findet; wiedrigenfalls werden sie bruchweise angesetzet.

$$\frac{8ab}{4a} = 2b;\ 8ab : 5d = \frac{8ab}{5d}.$$

IV. In Ansehung der Exponenten. 1) Wenn die Größen von einerley Wurzel gezeugt sind: subtrahire man den kleinern Exponenten von dem größern, und schreibe den Rest bey den gehörigen Buchstaben hin.

$$\frac{a^5}{a^3} = a^2;\ \frac{d}{d^4} = \frac{1}{d^3}.$$

2) Wenn die Größen von verschiedenen Wurzeln gezeugt sind, wird nichts vorgenommen. $a^5 : b^3 = \frac{a^5}{b^3}$.

V. In Ansehung der gebundnen Größen. Man schreibe den Divisor unter den Dividendus hin, und mache hinter solchen einen Bogen.

Man nehme das erste, oder sonst ein ander Glied des Divisors, das irgendwo in einem Gliede des Dividendus enthalten ist, und dividire nach obigen Gesetzen; setze den Quotienten hinter den Bogen.

Man

Man multiplicire mit diesem Quotienten alle Glieder des Divisors.

Man subtrahire das Product von dem Dividendus.

Man verfahre mit dem Reste, wie mit dem Dividendus, bis nichts überbleibt. (23 Anm.)

Anmerkungen.

20. Der Grund von der Veränderung der Zeichen beruhet darinn, daß eine wirkliche Größe subtrahiren eben so viel heiße, als etwas hinweg nehmen; und eine verneinende Größe subtrahiren eben so viel, als etwas wirkliches hinsetzen. Das erste ist von sich selbsten klar und deutlich, aber das letzte bedarf einer Erläuterung. Wenn man einen verneinenden Theil von einem Ganzen subtrahirt, so tilgt man ja in der That einen Mangel des Ganzen; ist es aber wohl möglich einen Mangel zu tilgen, ohne etwas wirkliches zu setzen? Gesetzt: man wollte eine Schuld von 1000 Thlr. abtragen; würde man nicht 1000 Thlr. am wirklichen Werthe geben müssen? Die verneinenden Größen nun müssen als Schulden angesehen werden (1 Anm.): so läßt es sich dann leichtlich begreifen, daß — abziehen eben so viel heiße, als + setzen.

21. In gewissen Fällen, worinnen die Glieder einer gebundnen Größe allzuhäufig sind, und die ausführliche Subtraction nicht erfordert wird, kann man sich damit begnügen lassen, daß man die Operation bloß anzeige. Dieses geschieht, wenn man den Subtrahendus in Klammern einschließt, und den Minuendus mit dem Subtractionszeichen — ohne die Klammern darneben stellet. Der nachstehende Ausdruck $(2b+c+4c^2d-d^3e^2+f)-a-2c+c^2d-4$ zeiget an, daß

die in Klammern eingeschränkte Größe von jener, die außer den Klammern angeschrieben ist, abgezogen werden soll.

22) Es kann nicht schwer fallen sich davon einen klaren und deutlichen Begriff zu machen, wenn man nur dasjenige wohl eingesehen hat, dessen wir 17 Anm. bey Gelegenheit der Multiplication gedacht haben. Denn wenn man + mit + dividirt, so nimmt man einen Theil der wirklichen Größe hinweg: kann nun wohl der Theil einer wirklichen Größe anders als wirklich seyn? Dividirt man aber — durch —, so leugnet man einen Theil der verneinenden Größe; den Mangel aber leugnen heißt so viel, als etwas wirkliches setzen; demnach muß —:— im Quotiente + ausmachen. Wem es noch befremdlich fällt, warum + mit —, oder — mit + im Quotienten — auswirft, hat weiter nichts nöthig, als auf den Satz der Arithmethik zurück zu sehen, daß der Quotient, wenn er mit dem Divisor multiplicirt wird, den Dividendus wieder herstellen muß. Dieses aber würde nicht geschehn, wenn man solches Zeichengesetz nicht wollte gelten lassen. Denn gesetzt der Quotient von $ab : -a$ wäre $+b$; in diesem Falle wäre das Product aus dem Quotiente $+b$ und dem Divisor $-a = -ab$, folglich $-ab = +ab$, welches wiedersprechend ist. Nimmt man aber $-b$ für Quotienten an, so ist das Product $-b \times -a = +ab$, und folglich dem Dividendus ab gleich. Diese Art des Beweises kann auch auf die Fälle +:+, und —:— mit angewendet werden.

23. Z. B. Es sey

der Dividendus $a^2 + 2ab + b^2$ (der Quotient $a + b$
der Divisor: $a + b$

$$\frac{a^2 + ab}{ab + b^2}$$
$$\frac{ab + b^2}{0}$$

Nur bilde man sich nicht ein, daß alle gebundne Größen dahin dividiret werden können, daß kein Rest überbleibe: dieß geht mit den wenigsten Größen an; man muß sich daher begnügen lassen, daß man die Operation durch gewisse Ausdrücke lediglich anzeige. Die gebräuchlichsten sind: 1) wenn man den Dividendus und den Divisor bruchweise ansetzt, dergestalt, daß der Dividendus allemal an die Stelle des Zählers zu stehen komme. 2) Wenn man sie beyde in Klammern einschließt, und das Divisionzeichen (:) darzwischen einschaltet. Diesemnach könnte die Division der nachstehenden Größe $3a + bc + d^2$ mit $a^3 b - b^2$ entweder in dem Ausdrucke $\frac{3a + bc + d^2}{a^3 b - b^2}$, oder in dem folgenden $(3a + bc + d^2) : (a^3 b - b^2)$ angezeiget werden.

Endlich verdient auch angemerkt zu werden, daß die Division mit der Theorie der Brüche auf das genaueste verbunden sey, weswegen sie dann einander wechselweise zu Hülfe kommen müssen. Wir geben von den algebrischen oder buchstäblichen Brüchen keinen besondern Unterricht, aus Ursach, weil solche von den arithmetischen Brüchen bloß dem Ausdrucke nach verschieden, übrigens aber allen Veränderungen so, wie die Zahl-

brüche, unterworfen sind. Nachstehende Beyspiele werden zum Beweise dienen.

Aufgaben in Brüchen.

1. Einen Bruch mit einfacherem Ausdrucke zu geben: $\frac{abc}{acd} = \frac{b}{d}$

2. Zween oder mehrere Brüche zu gleichen Nennern zu bringen: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$.

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}.$$

3. Die Brüche zu addiren:

$$\frac{a}{b} \text{ zu } \frac{d}{b} = \frac{a}{b} + \frac{d}{b} = \frac{a+d}{b}.$$

4. Die Brüche zu subtrahiren:

$$\frac{d}{c} \text{ von } \frac{a}{c} = \frac{a}{c} - \frac{d}{c} = \frac{a-d}{c}.$$

5. Die Brüche zu multipliciren: $\frac{a}{c} . \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$.

6. Die Brüche zu dividiren: $\frac{a}{x} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{bx}$.

Fünf=

Fünfte Tabelle.

Von der Erzeugung der Potenzen.

A. Erklärungen

1) Der Potenz.

Eine Potenz, Dignität, heißt ein Product, welches entsteht, wenn eine Größe ein- oder mehrmal mit der Einheit multiplicirt wird. (24 Anm.)

2) Der Wurzel.

Die Wurzel heißt eine Größe, wovon eine Potenz gezeugt ist worden. Man nennt sie auch die Stammgröße.

3) Des Exponenten.

Der Exponent heißt eine Größe, welche anzeigt, wie vielmal die gegebne Größe mit der Einheit multiplicirt worden ist. Er wird oben zur Rechten der Wurzel angeschrieben, z. B a^m ist die Potenz; a die Wurzel; m der Exponent.

B. Arten der Potenzen.

Die erste Potenz, welche die Einheit zum Exponenten hat: $a^1 = a$.

Die zweyte Potenz, Quadrat, welche 2 zum Exponente hat: $a^2 = aa$.

Die dritte Potenz, Cubus, Würfel, welche 3 zum Exponente hat: $a^3 = aaa$.

Die vierte, fünfte rc. Potenz, a^4, a^5 u. s. f.

Bestimmte Potenz, welche eine Zahl zum Exponente hat, a^2, a^3.

Unbestimmte Potenz, welche einen Buchstaben zum Exponente hat. a^m

C. Zeugungsgesetze.

a) Allgemeines.

Man setze die gegebne Stammgröße multiplicationsweise so vielmal hin, als viel Einheiten der Exponent in sich enthält.

Z. B. $a^2 = aa$; $a^3 = aaa$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{aa}{bb}$; $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

b) Besondere.

I. Wenn die zweyte Potenz gezeugt werden soll: multiplicire man die gegebne Stammgröße einmal mit sich selbst. $a^2 = a \times a = aa$; So ist auch die zweyte Potenz von $a + b = (a + b)\ (a + b) = aa + 2ab + bb$. (25 Anm.) $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$.

II. Wenn die dritte Potenz gezeugt werden soll, multiplicire man die gegebne Stammgröße zweymal mit sich selbst. $a^3 = a \times a \times a = aaa$; $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$; $(\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

So ist auch die dritte Potenz von $a + b = \left((a + b)\ (a + b)\right)\ (a + b) = aaa + 3aab + 3abb + bbb$. (26 Anmerk.)

III. Wenn die vierte, fünfte ꝛc. Potenz gezeuget werden soll, so muß die Stammgröße dreymal, viermal ꝛc. mit sich selbst multiplicirt werden. $a^4 = a \times a \times a \times a = aaaa$. (27 Anm.)

IV. Wenn es besondere Umstände nicht ausdrücklich fordern, zeige man die Potenz, ohne die wirkliche Multiplication vorzunehmen, bloß durch den Exponenten an. $aaa = a^3$; $aa + 2ab + bb = \overline{a+b}^2$; oder $(a+b)^2$.

V. Wenn die Stammgröße aus mehreren Buchstaben besteht, und diese vorhin mit Exponenten versehen sind, so wird der Exponent der verlangten Potenz mit den sonderlichen Exponenten der Stammgröße multiplicirt. $(a^3 b^2)^2 = a^6 b^4$; $(a^4 b^m)^n = a^{4n} b^{mn}$.

$$\left(\frac{a c^n}{b^n e^3}\right)^m = \frac{a^m c^{nm}}{b^{mn} e^{3m}}$$

D. Allgemeine Eigenschaften der Potenzen.

1. Ein Quadrat kann nicht anders als wirklich seyn. $a \times a = + a^2$; $-a \times -a = + a^2$ (28 Anm.)

2. Ein Cubus kann wirklich und verneinend seyn, nachdem die Wurzel, woraus er gezeugt worden, wirklich oder verneinend ist. Denn $a \times a \times a = + a^3$; und $-a \times -a \times -a = + a^2 \times -a = -a^3$. (29 Anm.)

3. Eine Potenz, welche eine Nulle zum Exponente hat, ist dem Einer gleich. $a^0 = 1$; denn $\frac{a^m}{a^m} = 1$; aber auch $\frac{a^m}{a^m} = a^0$; folglich $a^0 = 1$. (30 Anm.)

Anmerkungen.

24. Wir haben oben (7 Anm.) Erinnerung gethan, daß alle Größen wenigstens den Einer zum Exponente haben müssen. Es heißt demnach die gegebne Größe ein-

ein- oder mehrmal mit der Einheit multipliciren nichts anders, als diesen Exponenten mit dem Exponenten der gegebnen Potenz multipliciren; oder jenen so vielmal additionsweise nehmen, als dieser Einheiten in sich begreift.

25. Lasset uns bey diesem Beyspiele etwas stille halten. Weil die zweyte Potenz von $a+b=a^2+2ab+b^2$, so wird es nicht ungeschickt seyn, den nachstehenden Lehrsatz damit zu beweisen: **Das Quadrat einer gebundnen und aus zween Theilen bestehenden Stammgröße enthält in sich 1) das Quadrat des ersten Theils (a^2); 2) das doppelte Product des ersten Theils in den zweyten ($2ab$); 3) das Quadrat des zweyten Theils (b^2).** Diesem zufolge wird es nicht allzuschwer zu begreifen seyn, wie man den Lehrsatz auch an Größen von mehr als zween Theilen anwenden könne. Denn wollte man eine Größe von dieser Art in zween Theile zusammen ziehn, so könnte solche als eine Stammgröße von zwey Gliedern angesehen, und gleich dieser zur gegebnen Dignität erhöhet werden. Wir wollen einen Versuch von dieser Anwendung machen. Man verlangt das Quadrat von $a+b+c$. Nehmet $a+b$ für den ersten Theil $=a$, und c für den zweyten Theil $=b$ an.

Demnach ist das Quadrat des ersten Theils $a^2=(a+b)^2$,

Das doppelte Product aus beyden Theilen $2ab=2(ac+bc)$,

Das Quadrat des zweyten Theils $b^2=c^2$, und

Das verlangte Quadrat von $a+b+c=(a+b)^2+2(ac+bc)+c^2$; oder nach geschehener Ausführung $=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$.

26. Hier-

26. Hieraus nun wird folgender Lehrsatz bewiesen: Der Cubus einer gebundnen und aus zween Theilen bestehenden Stammgröße enthält in sich 1) den Cubus des ersten Theils (a^3); 2) das dreyfache Product jedes Theils in das Quadrat des andern Theils ($3aab$ und $3abb$); 3) den Cubus des zweyten Theils (b^3). Lasset uns allenfalls diesen Lehrsatz an Größen von mehr als zween Theilen anwenden. Es wird der Cubus von $a+b+c$ gefordert.

Setzet $a+b$ für den ersten Theil an $=a$; c für den zweyten $=b$.

Sonach ist der Cubus des ersten Theils $a^3=(a+b)^3$,

Das dreyfache Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweyten Theil $3aab=3(a+b)^2\times c$,

Das dreyfache Product aus dem Quadrat des zweyten Theils in den ersten Theil $3abb=3(a+b)\times c^2$,

Der Cubus des zweyten Theils $b^3=c^3$, und

Der verlangte Cubus von $a+b+c=(a+b)^3+3(a+b^2)\times c+3(a+b)\times c^2+c^3$; das ist: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$.

27. Diese drey besondere Gesetze werden unmittelbar aus der nachstehenden Regel, welche von den meisten Algebristen für ein allgemeines Zeugungsgesetz angenommen worden, hergeleitet; sie lautet also: Um eine Größe zur gegebnen Potenz zu erheben, lasset solche mit sich selbst einmal weniger multipliciren, als Einheiten der Exponent dieser Größe in sich begreift.

28. So kann man auch für richtig annehmen, daß die vierte, sechste, achte u. s. f. in gerader Progreßion fortschreitende Potenzen allezeit wirklich sind.

29. Diejenigen Potenzen, die in ungerader Progreßion ihrer Exponenten gehen, müssen dem zufolge wirklich oder verneinend seyn, nachdem die Stammgrößen, woraus sie entsprossen sind, mit + oder mit — angemerket sind.

30. Isaac Newton, einer der erhabensten Geister in dem Reiche der Algebre, hatte eine allgemeine Formel erfunden, durch deren Hülfe man eine jede Größe zur gegebnen Dignität erheben, und aus einer jeden Dignität eine jede Wurzel ziehen kann. Ihre Entfaltung ist weitläuftiger, als daß man sie hieher einrücken könnte. Wem es beliebt, mag solche in Wolfens Anfangsgründen der Algebre, und in dergleichen gelehrten Schriften nachschlagen.

Sechste Tabelle.

Von der Ausziehung der Wurzeln.

A. Erklärungen

1. Der Wurzel.

Die Wurzel ist eine Größe, aus welcher die Potenzen erzeuget werden. Man nennt sie um dieser Ursache willen die Stammgröße.

2. Des Ausziehens der Wurzel.

Die Wurzel ausziehn heißt diejenige Stammgröße finden, woraus die gegebne Potenz gezeugt ist worden.

B. Ar-

B. Arten der Wurzeln.

Die monomische oder ungebundne Wurzel a; b; ab.

Die binomische oder einmal gebundne Wurzel $a+b$; $a+bc$.

Die trinomische oder zweymal gebundne Wurzel $a+b+c$

Die polynomische oder überhaupt gebundne Wurzel.

Die unmögliche, eingebildte Wurzel. Also werden diejenigen Wurzeln genennt, die man sich bey negativen Potenzen von zweyten, vierten, sechsten, u. s. f. in gerader Progreßion schreitenden Graden vorstellig macht. (S. die 28 Anmerk.)

Die Irrationale oder Surde Wurzel, welche durch keine Zahl genau ausgedrückt werden kann. Z. B. die Quadratwurzel von 2.

C. Die Wurzelzeichen.

Das Zeichen einer Quadratwurzel ist $\sqrt{}$ oder $\sqrt[2]{}$.

" " Cubicwurzel $\sqrt[3]{}$.

" " unbestimmten Wurzel $\sqrt[m]{}$

Die polynomischen Wurzeln werden angegeben, wenn man sie in Klammern einschließt, oder einen langen Strich darüber macht, und das Wurzelzeichen vorne ansetzet. Sonach wird die Quadratwurzel der Größe $aa+bb$ also angemerkt: $\sqrt{}(aa+bb)$ oder $\sqrt{\overline{aa+bb}}$.

D. Gesetze für die Ausziehung der Wurzeln.

I. Wenn die Potenz eine einfache Größe ist.

Man dividire den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der Wurzel; hieraus nun entsteht ein Bruch.

Man

Man reducire diesen Bruch zu ganzen Größen, wenn sich es thun läßt; wiedrigen Falls zeige man die Ausziehung bloß durch das Wurzelzeichen an.

Z. B. $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$; $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$; $\sqrt[5]{a^5}=a$; $\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[5]{a^4}$.

II. Wenn die Potenz eine zusammen gesetzte Größe ist.

Man dividire den Exponenten jedes Buchstabens mit dem Wurzelexponenten.

Z. B. $\sqrt{a^2 b^6}=a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{6}{2}}=ab^3$; $\sqrt[3]{a^6 b}=a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{1}{3}}=a^2 b^{\frac{1}{3}}$.

III. Wenn die Potenz mit einem Coefficiente versehen ist.

Man ziehe aus dem Coefficienten die verlangte Wurzel aus. (31 Anm.)

IV. Wenn die Potenz eine gebrochene Größe ist.

Man ziehe sowohl aus dem Nenner, als aus dem Zähler die verlangte Wurzel nach obigen Vorschriften aus.

$$\sqrt{\frac{4aa}{9cc}}=\frac{2a}{3c};\quad \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b};\quad \sqrt[m]{\frac{a^r b^t}{cd^n}}=\frac{a^{\frac{r}{m}} b^{\frac{t}{m}}}{c^{\frac{l}{m}} d^{\frac{n}{m}}}$$

V. Wenn die Potenz eine gebundne Größe ist.

Man urtheile nach Anleitung der 25 und 26 Anmerk. ob die gegebne Potenz aus der verlangten Wurzel gezeugt worden sey, oder nicht. Im ersten Falle wird sich die Wurzel von selbst entfalten; im zweyten Falle findet die wirkli-

wirkliche Wurzelziehung nicht statt, sondern muß durch die gehörigen Wurzelzeichen lediglich angezeiget werden.

E. Allgemeine Eigenschaften der Wurzeln.

1. Die Wurzel einer ungebundnen Potenz ist allemal ungebunden.

2. Die Wurzel einer gebundnen Potenz ist allemal gebunden. (32 Anm.)

Anmerkungen.

31. Die Coefficienten sind Zahlen; es werden daher die angehenden Algebristen ein Verlangen tragen, das Verfahren zu begreifen, dessen man sich bey Ausziehung der Zahlwurzeln bedienen muß. Ueberhaupt könnte man sagen, daß die Ausziehung der Wurzel in Zahlen auf einerley Grund, und eben dieselben Gesetze sehen muß, die wir von buchstäblichen Wurzeln angeführt haben. Aber wir wollen einen ebenern Weg dahin zeigen.

Erste Aufgabe.

Aus einer bestimmten Zahl (529) die Quadratwurzel zu ziehen.

Das Verfahren.

1. Man theilt die gegebne Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen: in jeder Classe stehen zwo Zahlen; denn so viel Theile hat die Wurzel als Classen heraus kommen: in der letzten Classe mögen wenigere stehn.

2. Man suchet eine Quadratzahl auf, welche derjenigen, die in der ersten Classe steht, entweder gleich ist, oder ihr am nächsten beykömmt (hier 4); zieht sie davon ab, und setzt die dazu gehörige Wurzel (hier 2) an die Stelle des Quotienten.	5|29 (23 die Wurz. 4 ——— 1, 29 43 ——— 129 ——— 0

3. Man dopplirt hierauf den gefundnen Quotienten; setzt das Product (hier 4) unter die erste Zahl der folgenden Classe (hier unter 2) an, und sofort gegen die Linke zurück, wenn es aus mehrern Zahlen besteht; dividiret hiemit wie gewöhnlich, und schreibt den Quotienten (hier 3) neben den vorhin gefundnen Quotienten hin.

4. Man setzt diesen Quotienten unter die letzte Zahl derselben Classe (hier unter 9); dann multiplicirt man damit die unterschriebenen Zahlen (hier 43), und zieht das Product (hier 129) von den oberen Zahlen des Quadrats ab.

5. Sind mehr Classen vorhanden, so wendet man die dritte und vierte Regel so lange an, bis nichts mehr überbleibt, das ist: bis alle Theile der Wurzel gefunden worden.

Zweyte Aufgabe.

Aus einer bestimmten Zahl (12167) die Cubicwurzel zu ziehen.

Das Verfahren.

1. Man theilt die gegebne Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen; giebt jeder Classe drey Zahlen;

len; dann so viel Theile hat die Wurzel als Classen heraus kommen. In der letzten Classe mögen wenigere stehn.

```
12|167 (23 die Wurz.
 8|
———
 4|167
  12
  36
   54
    27
———
  4167
```

2. Man sucht eine Cubiczahl auf, welche den Zahlen in der ersten Classe entweder gleich ist, oder am nächsten beykömmt, (hier 8); zieht diese von jenen ab, und setzet die gehörige Wurzel (hier 2) an die Stelle des Quotienten an.

3. Man erhebt den Quotienten zum Quadrat, (hier 4); nimmt solches dreymal, (hier 12); schreibt es unter die erste Zahl der folgenden Classe (hier unter 1), und sofort gegen die Linke: dividirt damit in die darüber stehenden Zahlen; der Quotient (hier 3) ist der zweyte Theil der Wurzel.

4. Man multiplicirt den Divisor (hier 12) mit diesem zweyten Theile der Wurzel; schreibt das Product (hier 36) darunter.

5. Man multiplicirt diesen zweyten Theil der Wurzel mit sich selbst; und mit diesem Quadrate (hier 9) den ersten Theil der Wurzel, oder alle bereits gefundene Quotienten: nimmt das Product dreymal (hier 54) und setzet es unter das vorige Product, daß die letzte Ziffer unter die zweyte Ziffer der zweyten Classe komme (hier unter 6).

6. Man macht aus dem zweyten Theile der Wurzel einen Cubus (hier 27) und schreibt ihn unter die vorigen Producte so hin, daß die letzte Ziffer unter die dritte Ziffer der zweyten Classe zu stehen komme: addirt diese drey Producte: zieht die Summe von dem Reste der ersten und zweyten Classe ab.

7. Man fährt auf diese Weise in der dritten und folgenden Classen fort, bis alle Theile der Wurzel gefunden worden.

32. Mathematikern, die bereits zu einiger Fertigkeit in der Algebre gelanget sind, kömmt es nicht schwer an zu bestimmen, ob das gegebne Polynomium eine vollkommene oder unvollkommene Potenz sey; folglich ob man die Wurzel wirklich ausziehen, oder die Ausziehung bloß durch die gewöhnlichen Merkmaale angeben müsse. Das Gegentheil erfahren die angehenden Algebristen. Diesen nun zu gefallen wollen wir einer Methode gedenken, welche in die Nachforschung der polynomischen Stammgrößen den stärksten Einfluß hat. Das ganze Verfahren läßt sich dahin einschränken:

Gesetzt, man sollte die Quadratwurzel von $a^2 + 2ab + b^2$ bestimmen. Einen Blick auf dieses Polynomium geworfen, setzet uns schon in Stand zu urtheilen, daß dessen Wurzel allenfalls polynomisch seyn müsse; aus Ursach, weil die Wurzel einer gebundnen Potenz nicht anders als gebunden seyn kann. Lasset uns demnach gedenken, sie sey binomisch: hier wird uns einfallen, daß in diesem Falle das Polynomium drey wesentliche Glieder haben müßte. 1) Das Quadrat des ersten Theils; 2) das doppelte Product eines Theils in den andern; 3) das Quadrat des zweyten Theils. (S. die 25 Anmerk.) Nun so finden sich hier in der That diese drey Glieder; worunter das erste (a^2) ein Quadrat ist: man nimmt daher dessen Wurzel a für den ersten Theil der willkürlich angenommenen binomischen Wurzel an, und schreibt solche hinter den Bogen hin:

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2ab + b^2 & (a+b) \\ -a^2 \quad\quad\quad\quad & \\ \hline 2ab + b^2 & \\ 2a + b & \\ b & \\ \hline 2ab + b^2 & \\ -2ab - b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Eben dasselbe Quadrat subtrahire man von dem Polynomium; der nachstehende Rest $2ab + b^2$ wird noch überbleiben. Dieser Rest nun muß das doppelte Product aus a in dem zweyten Wurzeltheil in sich enthalten. Sonach dividire man den sämmtlichen Rest mit $2a$ als dem einen Factor: der Quotient b, welcher auf diese Weise herauskömmt, giebt den andern Factor, und zugleich den zweyten Theil der gesuchten Wurzel an. Man verbinde denselben mit dem ersten Wurzeltheile hinter den Bogen. Soll nun b in Wahrheit den zweyten Wurzeltheil ausmachen; so muß das Product aus b in $2a$ sammt dessen Quadrat dem Reste $2ab + b^2$ gleich seyn.

Um dieses zu erfahren, verbinde man den zweyten Wurzeltheil b mit dem Divisor $2a$, und multiplicire diese gebundne Größe $2a + b$ mit demselben b; schreibe das Product $2ab + bb$ darunter: subtrahire es von dem darüber stehenden Reste $2ab + b^2$; und weil nichts von einem Reste überbleibt, so ist $a + b$ die gesuchte Wurzel. Die Richtigkeit dieser Operation gründet sich darauf, daß sie uns alle die Theile, woraus das gegebene Polynomium besteht, vor die Augen stellet.

Die binomischen Cubicwurzeln sind einem ähnlichen Verfahren unterworfen: nur will es erforderlich

seyn, daß sich die angehenden Algebristen deutliche Begriffe aller der Theile bilden, woraus ein polynomischer Cubus bestehet (S. 26 Anmerk.) Die Uebung ist auch hierinn die größte Lehrmeisterinn.

Man verlangt die Cubicwurzel von $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. $(a+2b)$. Man findet keinen Anstand zu glauben, daß die Wurzel polynomisch seyn müsse. Gesetzt nun sie sey binomisch; so muß der gegebne Cubus drey wesentliche Theile in sich begreifen. 1) Den Cubus des ersten Wurzeltheils; 2) das dreyfache Product jedes Theils in das Quadrat des andern Theils; 3) den Cubus des zweyten Wurzeltheils.

$$
\begin{array}{l}
a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^2 \quad (a+2b. \\
-a^3 \\
\hline
\quad 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 \\
\quad 3a^2 \\
\hline
\quad 6a^2b \\
\qquad\quad + 12ab^2 \\
\qquad\qquad\quad + 8b^3 \\
\hline
\quad 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3.
\end{array}
$$

Dieses voraus gesetzt, dürfte der Cubus des ersten Theils a^3 seyn. Man setzet seine Wurzel a hinter den Bogen an, und zieht den Cubus a^3 von dem Polynomium ab.

In dem Reste $6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ muß das dreyfache Product aus dem Quadrat des gefundenen Wurzeltheils a in den andern Theil der Wurzel begriffen seyn. Sonach erhöhet man a zum Quadrat a^2: nimmt es dreymal $3a^2$: dividirt damit in den Rest, so kömmt $\frac{6a^2b}{3a^2}$

$\frac{6a^2b}{3a^2} = \frac{6}{3}b = 2b$ heraus. Dieser Quotient wird dann mit dem vördern Quotient a hinter dem Bogen verbunden.

Im Falle nun $2b$ der zweyte Wurzeltheil seyn soll: so muß die Summe der Producten $3a^2$ in $2b$ und $12b^2$ in a, sammt dem Cubus von $2b = 8b^3$ dem übergebliebenen Reste $6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ gleich seyn: sie ist es aber in der That: folglich ist $a + 2b$ die gesuchte Wurzel.

Siebende Tabelle.

Von den Wurzelgrößen.

A. Erklärung der Wurzelgrößen.

Größen, welche mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ angemerkt werden, heissen Wurzelgrößen. (33 Anm.)

B. Arten der Wurzelgrößen.

Die gleichnamigen (quantitates radicales ejusdem denominationis), welche einerley Wurzelzeichen haben. Z. B. $\sqrt{ab}$ und $\sqrt{cd}$; $\sqrt[4]{20}$ und $\sqrt[4]{7}$.

Die ungleichnamigen (diversae denominationis), welche verschiedene Wurzelexponenten haben. Z. B. $\sqrt{ab}$ und $\sqrt[3]{cd}$; $\sqrt[3]{10}$ und $\sqrt[4]{10}$.

Die gemeinschaftlichen (communicantes, commensurabiles), welche nicht allein gleiche Wurzelexponenten, sondern auch gleiche Größen hinter dem Wurzelzeichen haben. Z. B. $4\sqrt{3}$ und $5\sqrt{3}$.

Die ungemeinschaftlichen (non communicantes, incommensurabiles) welche diese Bedingnisse nicht haben.

C. Gesetze der Reduction der Wurzelgrößen.

I. Wenn man die Wurzelgrößen ihres Wurzelzeichens, womit sie behaftet sind, entledigen soll.

Man schreibt den Wurzelexponenten unter den Exponenten der Größe in Gestalt eines Bruchnenners hin.

Z. B. $\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}}$; $\sqrt[m-r]{a^m} = a^{\frac{m}{m-r}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

II. Wenn man zwo ungleichnamige Wurzelgrößen zu gleicher Benennung bringen soll.

Man entlediget sie ihres Wurzelzeichens nach Anweisung der vördern Aufgabe.

Man bringet die bruchweise angesetzten Exponenten gleich den Brüchen zu gleichen Nennern. (34 Anm.)

Z. B Nachstehende Wurzelgrößen $\sqrt[n]{a^m}$ und $\sqrt[r]{b^t}$ sollen zu gleicher Benennung gebracht werden; machet $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, und $\sqrt[r]{b^t} = b^{\frac{t}{r}}$; sonach wird $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$, und $b^{\frac{t}{r}} = b^{\frac{nt}{nr}}$; folglich $a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$, und $b^{\frac{nt}{nr}} = \sqrt[nr]{b^{nt}}$.

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}. \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}. \end{cases}$$

III. Wenn man die Wurzelgrößen auf die einfachste Art ausdrücken soll.

Man löset die gegebne Größe in ihre Factoren auf.

Man

Man sieht auf das fleißigste nach, ob darunter einer zu finden, welcher zu derselben Potenz, die der Wurzelexponent angiebt, erhoben sey.

Man zieht aus diesem die Wurzel.

Man setzet sie vor das Wurzelzeichen gleich einem Coefficienten an.

Man läßt die übrigen Factorn auf ihren Stellen hinter dem Wurzelzeichen unverändert. (35 Anm.)

Beyspiele.

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \times 8} = 2\sqrt[3]{2}.$

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \times 8} = 2\sqrt[3]{3}.$

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}.$

$\sqrt{ab^2} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}} = b\sqrt{a}.$

$$\frac{\sqrt{b^3 d}}{a^2 c} = \frac{b^{\frac{3}{2}} d^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{2}} c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{2}{2}} b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{2}} c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b\sqrt{bd}}{a\sqrt{c}}.$$

IV. Wenn man die Coefficienten der Wurzelgrößen aufheben soll.

Man erhebt den Coefficienten zu derselben Potenz, die von dem Wurzelexponenten angezeigt wird.

Man multiplicirt damit die übrigen Größen, welche nach dem Wurzelzeichen stehn.

Beyspiele.

$2\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}.$

$2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3 \times 16} = \sqrt[4]{48}.$

$a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b^2 \times a^3} = \sqrt[3]{a^3 b^2}.$

$$\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d} \times \frac{a^n}{b^n}} = \sqrt{\frac{a^n c}{b^n c}}.$$

D. Uebrige Veränderungen der Wurzelgrößen.

a) Addiren und Subtrahiren.

I. Wenn die Wurzelgrößen gemeinschaftlich sind.

Man addirt ihre Coefficienten: oder subtrahirt den einen von dem andern.

Man setzet der Summe oder dem Reste das gemeinschaftliche Wurzelzeichen bey. (36 Anm.)

Beyspiele der Addition.

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\ \underline{\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}} \\ 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \end{array}$$

Beyspiele der Subtraction.

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} - 4\sqrt{7}. \\ \underline{3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} - \sqrt{7}} \\ 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} - 3\sqrt{7}. \end{array}$$

II. Wenn die Wurzelgrößen ungemeinschaftlich sind.

Man schaltet zwischen sie das Addition- oder Subtractionzeichen ein.

Z. B. $\sqrt{7}$ zu $\sqrt{5} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$. So auch $\sqrt{5}$ von $\sqrt{7} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$.

III. Wenn die Wurzelgrößen mit mehr als einem Wurzelzeichen befaßt sind.

Man addirt und subtrahirt sie nach obigen Gesetzen; nur muß man annehmen, daß Wurzelgrößen, die gleich viel

viel Zeichen und gleiche Größen hinter den Zeichen haben, gemeinschaftlich, die es nicht haben ungemeinschaftlich sind.

Z. B. $2\sqrt{(2\sqrt{3})}$ zu $3\sqrt{(2\sqrt{3})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})}$; und $4\sqrt{(3\sqrt{5})}$ von $6\sqrt{(3\sqrt{5})} = 2\sqrt{(3\sqrt{5})}$.

b) Multipliciren.

I. Wenn die Größen nur ein einfaches Wurzelzeichen haben.

Man bringt die Wurzelgrößen zu einerley Benennung, multiplicirt ihre Coefficienten mit einander, und behält das gemeinschaftliche Wurzelzeichen bey.

Z. B. $\begin{cases} \sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12. \\ \sqrt{ab} \times \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{a^3b^3} \times \sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[6]{a^7b^5} \\ 2b\sqrt{cd} \times 4b\sqrt{cd} = 8b^2\sqrt{c^2d^2} = 8b^2cd. \end{cases}$

II. Wenn die Größen mehrere Wurzelzeichen haben.

Man multiplicirt diejenigen Wurzelgrößen, welche gleich viele Wurzelzeichen haben, mit einander.

Z. B. $\sqrt{(3+\sqrt{2})} \times \sqrt{(5\sqrt{5})} + \sqrt{(\sqrt{10})} = \sqrt{\sqrt{1125}} + \sqrt{\sqrt{750}}$.

c) Dividiren.

I. Wenn die Größen nur ein einfaches Wurzelzeichen haben.

Man bringet sie zu gleicher Benennung.

Man dividirt die Coefficienten und die Wurzelgrößen des Divisors.

Z. B.

3. B. $\begin{cases} 6\sqrt{ab} : 3\sqrt{b} = 2\sqrt{a}. \\ \sqrt[6]{c^2 d^2} : \sqrt[6]{c^3 d^3} = \sqrt[6]{\frac{c^2 d^2}{c^3 d^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{cd}}. \end{cases}$

II. Wenn die Größen mehrere Wurzelzeichen haben.

Man dividirt diejenigen Wurzelgrößen, welche hinter gleich vielen Wurzelzeichen angesetzet sind.

Zum Beyspiele.

$\sqrt{\sqrt{8}} : \sqrt{\sqrt{2^2}} = \sqrt{2}.$

$\sqrt{5\sqrt{25}} + \sqrt{(5\sqrt{10})} : \sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{(5\sqrt{5})}.$
(37 Anm.)

d) Zeugung der Potenzen.

Man entlediget die Wurzelgrößen ihrer Coefficienten, im Falle welche vorhanden sind.

Man dividirt den Exponenten des Wurzelzeichens mit dem Exponenten der gegebnen Potenz.

Zum Beyspiele.

$(\sqrt[2]{a})^2 = \sqrt[2:2]{a} = \sqrt[1]{a} = a.$ (38 Anm.)

$(2\sqrt[2]{3})^2 = (\sqrt[2]{3 \times 4})^2 = \sqrt[2:2]{12} = \sqrt[1]{12} = 12.$

e) Ausziehung der Wurzeln.

Man macht die gegebnen Größen von ihren Coefficienten los, und multiplicirt den Exponenten des Wurzelzeichens mit dem Exponenten der gegebnen Wurzel.

Zum

Zum Beyspiele.

$$\sqrt{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[2\times3]{c} = \sqrt[6]{c}.$$

$$\sqrt{(2\sqrt[3]{4})} = \sqrt{(\sqrt[3]{4\times8})} = \sqrt[3\times2]{32} = \sqrt[6]{32}.$$

Anmerkungen.

33. Unter dem Namen der Wurzelgrößen werden hier meistens nur irrationale Wurzeln verstanden; ihre Theorie ist mit allen Arten der algebrischen Operationen genau verbunden, weswegen sie dann von den Anfängern in der Algebre nicht obenhin abgehandelt werden soll.

34. Im Falle, worinn mehr als zwo Wurzelgrößen vorhanden sind, werden je zwo und zwo unter gleiche Benennung gebracht.

35. Es kostet wenig Mühe die Factorn einer algebrischen Größe aus einander zu setzen: mehrere Beschwernisse äußern sich in den Zahlen; aber auch hierinn lassen sich gewisse Vortheile mit Nutzen anwenden. Z. B. Ihr verlanget zu wissen, ob die nachstehende Wurzelgröße $\sqrt[4]{368}$ einen Factor vom vierten Grade habe.

Löset die gegebne Wurzelgröße $\sqrt[4]{368}$ vermittelst der Division in ihre Factorn auf; versuchet aber die Operation mit den kleinsten Zahlen: setzet den Quotienten dem Divisor zur Seite hin.

$$
\begin{aligned}
368 &: 2 = 184\\
\text{„} &: 4 = 92\\
\text{„} &: 8 = 46\\
\text{„} &: 16 = 23.
\end{aligned}
$$

Hier:

Hieraus erhellet nun, daß unter den gefundnen Factoren die Zahl 2 zu finden, deren erste Potenz 2, die zweyte 4, die dritte 8, die vierte 16 ist; sonach ist die Zahl 16 der gesuchte Factor vom vierten Grade: folglich $\sqrt[4]{368} = \sqrt[4]{23 \times 16} = 2\sqrt[4]{23}$.

In Fällen, worinnen ein Factor vom gleichen Grade mit dem Wurzelexponenten nicht könnte aufgetrieben werden, fände auch diese Art der Verwandlung nicht statt. Von dieser Gattung sind die nachstehenden Wurzelgrößen: $\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{ab^2}$; $\sqrt[n]{a^m b^r}$.

Endlich hat man noch den Umstand nachzuholen, daß durch Hülfe dieser Reduction die Wurzelgrößen nicht selten zu gemeinschaftlichen Größen gebildet werden. Z. B. die nachstehenden Wurzelgrößen $\sqrt{8}$ und $\sqrt{18}$ sind von sich selbsten ungemeinschaftlich; aber durch die Reduction bekommen sie folgendes Aussehen: $2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$; wer siehet nicht, daß sie dadurch schon gemeinschaftlich geworden sind? Gleichfalls fallen die nachstehenden Wurzelgrößen $\sqrt[3]{a^3 b}$ und $\sqrt[3]{c^3 b}$ nach geschehener Reduction dergestalt aus: $a\sqrt[3]{b}$, $c\sqrt[3]{b}$: so aber sind sie schon gemeinschaftlich.

Wie überhaupt alle Größen, so haben auch die Wurzelgrößen, im Fall dieselben mit keinem ausdrücklichen Coefficienten oder Exponenten versehen sind, den Einer zum Coefficienten oder Exponenten.

37. Es geschieht nur allzuoft, daß die wirkliche Division in den Wurzelgrößen nicht statt findet: in diesen Fällen muß solche bloß in Gestalt eines Bruchs angezeigt werden.

Wenn man mit vermischten Größen zu thun hat, das ist, mit Größen, welche nicht durchgehends Wurzelgrößen

größen sind, so ist es allenfalls erforderlich, daß man sie unter ein Geschlecht bringe, und diejenigen, so keine Wurzelgrößen sind, zu solchen mache. Diese Verwandlung geschieht nun, wenn man die Größe zu eben derseben Potenz, welche das Wurzelzeichen der Irrationalwurzel angiebt, erhöhet, und das Wurzelzeichen vorne anschreibet. Z. B. die nachstehende Zahl 5 wäre wurzelweise zum dritten Grade ($\sqrt[3]{}$) anzusetzen: erhöhet die gegebne Zahl 5 zur dritten Potenz (125): setzet das Wurzelzeichen $\sqrt[3]{}$ vor: sonach wird $5 = \sqrt[3]{125}$. Diese Art der Verwandlung ist wohl zu behalten.

Zwar haben wir uns in den angezogenen Beyspielen meistens der wirklichen Wurzelgrößen bedienet; aber die verneinenden müssen nach eben denselben Gründen und Gesetzen abgehandelt werden. Nur ist noch bey den Algebristen eine unentschiedene Sache, ob man sich in einem aus zwoen negativen Größen gezeugten Producte, oder aufgelösten Quotiente des Zeichens +, nach der gemeinen Vorschrift, oder des Zeichens —, nach einem besondern und der Natur der negativen Wurzeln gegründeten Gesetz gebrauchen soll. Uns kömmt es sehr wahrscheinlich vor, daß die auf solche Weise gezeugten Producte oder aufgelösten Quotienten, eine unmögliche oder eingebildte Wurzel haben, und daher mit dem verneinenden Zeichen — angemerket werden müssen. Das Quadrat von $\sqrt{-a}$ ist gewißlich kein anderes als $-a$; folglich auch $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.

38. Dieses Beyspiel beweiset den nachstehenden Satz: **Wenn man eine Wurzelgröße zu derselben Potenz, welche das Wurzelzeichen angiebt, erheben soll, so lasse man das Wurzelzeichen hinweg, und schreibe die nach dem Wurzelzeichen angesetzte Größe ohne Veränderung hin.**

Z. B.

z. B. $\left\{\begin{array}{l}(\sqrt[3]{a})^3 = a. \\ (\sqrt[4]{a})^4 = a. \\ (\sqrt[6]{a})^6 = a. \\ (\sqrt[7]{a^2})^7 = a^2.\end{array}\right.$

Drittes Hauptstück.

Von der Vergleichung der Größen.

I. Vergleichung der Größen von einerley Art.

Achte Tabelle.

Von Verhältnissen der Größen.

A. Erklärung des Verhältniß.

Das Verhältniß (ratio quantitatum), heißt eine Vergleichung zwoer Quantitäten von einerley Art in Ansehung der Größen, welche die eine gegen die andere hat. (39 Anm.)

B. Namen der Größen im Verhältniß.

Glieder des Verhältniß heißen die Größen, welche mit einander verglichen werden.

Das vördere Glied, welches man sich hierbey zuerst vorstellet.

Das hintere Glied, welches zuletzt steht.

Die

Die Differenz wird der Rest genennt, welcher entsteht, wenn man das kleinere Glied von dem größern subtrahirt.

Der Exponent oder der Namen des Verhältnisses ist der Quotient, welcher herauskömmt, wenn man das göße re Glied mit dem kleinern dividirt. Er zeigt an, wie vielmal dieses in jenem enthalten sey.

C. Zeichen des Verhältniß.

Sind zween Puncte, welche zwischen die beyden Glieder des Verhältniß eingeschaltet werden. (40 Anm.)

In dem nachstehenden Verhältniß 2 : 6 ist 2 das erste oder vördere Glied, 6 das hintere Glied, 4 die Differenz, 3 der Exponent; (:) das Zeichen des Verhältniß.

D. Arten des Verhältniß.

Das arithmetische Verhältniß, wenn bey Vergleichung zwoer Größen darauf gesehen wird, um wie viel das eine Glied größer ist als das andere; folglich wenn man vermittelst der Subtraction ihre Differenz untersucht.

Das geometrische Verhältniß; wenn darauf gesehen wird, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten ist; folglich wenn man durch die Division ihren Exponenten untersucht. (41 Anm.)

Das gleiche Verhältniß, welches mit einem andern Verhältniß, womit es verglichen wird, einerley Differenz, oder einerley Exponenten hat. Z. B. nachstehende Verhältnisse 5 : 3 und 4 : 2, imgleichen 2 : 4 und 5 : 10 sind gleiche Verhältnisse.

Das ungleiche Verhältniß, welches in Ansehung eines andern Verhältniß eine verschiedene Differenz, oder einen verschiedenen Exponenten hat. Z. B. 3 : 9 und 5:6, oder 4:12 und 2:4.

Das verkehrte Verhältniß (ratio reciproca, inversa); wenn sich das vördere Glied des ersten Verhältniß zu seinem hintern Gliede also verhält, wie das hintere Glied des zweyten Verhältniß zu seinem vördern Gliede. Z. B. 12:4 ist ein verkehrtes Verhältniß gegen 2 : 6.

Das gerade Verhältniß (ratio directa); wenn sich das vördere Glied des ersten Verhältniß zu seinem hintern Gliede, wie das vördere Glied des zweyten Verhältniß zu seinem hintern Gliede verhält. Z. B. 4:12 ist ein gerades Verhältniß gegen 2:6.

Das zusammengesetzte Verhältniß, wenn das Product aus den vördern Gliedern zweyer oder mehrer geometrischen Verhältnissen mit dem Producte aus ihren hintern Gliedern verglichen wird. Z. B. $ac:bd$ ist ein zusammengesetztes Verhältniß $a:b$, $c:d$. (42 Anm.)

Das steigende Verhältniß, wenn das vördere Glied kleiner ist als das hintere.

Das fallende Verhältniß, wenn das vördere Glied größer ist als das hintere.

Zum Beyspiele.

1:2 und 3:4, und 5:6 sind steigende Verhältnisse.
4:2 und 6:3, und 10:5 sind fallende Verhältnisse.

E. Allgemeine Eigenschaften der Verhältnisse.

I. Wenn man in einem arithmetischen Verhältniß das vördere Glied a, und die Differenz b nennt, so

ist

ist das hintere Glied in dem steigenden Verhältniß $a+b$; in dem fallenden $a-b$; und eine allgemeine Formel zu allen arithmetischen Verhältnissen $a:a\pm b$. (43 Anmerk.)

II. Wenn man in einem geometrischen Verhältniß das vördere Glied a, und den Exponenten m nennt, so kann ein jedes hinteres Glied mit am angegeben werden; woraus dann eine allgemeine Formel für alle geometrische Verhältnisse entspringt: $a:am$. (44 Anm.)

III. Wenn zu beyden Gliedern eines arithmetischen Verhältniß einerley Größe addirt, oder davon subtrahirt wird; bleibt die Größe des Verhältniß unverändert. Man addire zu dem nachstehenden Verhältniß $a:a+b$ die Größe n; so wird $a+n:a+b+n$. Sonach aber stehen sie noch in eben demselben Verhältniß, weil sie eben dieselbe Differenz beybehalten.

IV. Wenn beyde Glieder des geometrischen Verhältniß mit eben derselben Größe multiplicirt oder dividirt werden, bleibt das Verhältniß unverändert. Man dividire das Verhältniß $a:am$ mit n, so wird $\frac{a}{n}:\frac{am}{n}$; sonach aber stehen sie noch in eben demselben Verhältniß, weil sie eben denselben Exponenten m beybehalten. (45 Anmerk.)

Anmerkungen.

39. Wir wollen dieser Erklärung noch ein anderweitiges Licht geben. Wenn man die Größe einer Quantität nach einem gewissen Maaßstab bestimmt, z. B. nach dem Fuß oder der Ruthe, so zeigt man das Verhältniß der Größe nach dem Maaßstab an. Wollte man nun anstatt des Maaßstabes eine andere Größe b nehmen,

men, so könnte das Verhältniß auch zwischen zwoen Größen seyn. Wenn ich demnach sage, *a* ist dreymal größer als *b*, so bestimme ich die Größe einer Quantität durch die Größe der andern, und zeige an, was für ein Verhältniß zwischen den beyden Quantitäten sey.

40. Einige Rechenmeister wollen unter dem Zeichen des arithmetischen und des geometrischen Verhältniß einen Unterschied wissen. Jenes merken sie mit einem Striche (1 — 2), dieses aber mit zween Puncten (2 : 4) an. Ich gestehe es, sie fordern diese Zeichenordnung nicht ohne Grund; nichts destoweniger gebrauchen sich die neusten Mathematiker der zween Puncte ohne Unterschied zu allen Arten der Verhältnisse. Diesen also wollen wir nachfolgen.

Das arithmetische Verhältniß z. B. 2 : 5 wird gemeiniglich also ausgesprochen: 2 gehet ab von 5; das geometrische aber 2 : 8 dergestalt: 2 verhält sich zu 8. Wir nehmen den letzten Ausdruck auch in den arithmetischen Verhältnissen nach dem Beyspiel der meisten Algebristen an.

41. Sonach findet zwischen jeden zwoen Größen sowohl ein arithmetisch als geometrisch Verhältniß statt, nachdem man bey ihrer Vergleichung entweder auf ihre Differenz, oder auf ihren Exponenten sehen will; folglich nachdem man sie entweder von einander subtrahirt, oder die eine mit der andern dividirt. Z. B. wenn man 2 mit 6 vergleichet, und dabey bloß auf den Unterschied beyder Größen sieht, hat man ein arithmetisches Verhältniß; sieht man aber auf ihren Exponenten, so hat man ein geometrisch Verhältniß.

42. Hieraus lassen sich nun die verschiedenen Arten des zusammengesetzten Verhältniß leichtlich entfalten: man

man darf nur auf die Menge der einfachen Glieder, woraus ein zusammengesetztes Glied erwachsen ist, Acht haben. Denn sind die im Verhältniß stehenden Producte aus zwey Gliedern von gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, so ist es ein doppeltes Verhältniß (ratio duplicata); sind sie aus dreyen zusammen geschmolzen, so ist es ein dreyfaches Verhältniß (ratio triplicata), u. s. f.

43. Die angehenden Algebristen müssen sich gewöhnen, die algebrischen Formeln wohl und geschickt auszusprechen. So dürfte dann die nachstehende Formel $a \pm b$ in der algebrischen Mundart also lauten: In einem arithmetischen Verhältniß findet sich das größere Glied, wenn man die Differenz zu dem kleinern Gliede addirt; das kleinere Glied aber, wenn man die Differenz von dem größern abzieht.

44. Die meisten Mathematiker nehmen $a : am$ für die allgemeine Formel sowohl in den steigenden als in den fallenden geometrischen Verhältnissen an, und mit Recht; nur bedarf die Sache einer genauern Erläuterung.

In Fällen, worinn man mit steigenden Verhältnissen zu thun hat, ist es von selbsten deutlich, daß das Product des Exponenten mit dem kleinern Gliede das größere Glied zeugen, folglich am das größere Verhältnißglied seyn muß. Denn weil der Exponent m ein Quotient ist, welcher entsteht, wenn man das größere Glied mit dem kleinern dividirt; so muß das Product des Quotienten mit dem kleinern Gliede das größere Glied wieder herstellen. Alles dieses beziehet sich auf die allgemeinsten Grund- und Lehrsätze der Rechenkunst. Aber in fallenden Verhältnissen dürfte man am für das zwey-

te Glied ohne gewissen Bedingnissen nicht annehmen. Denn bildet euch ein, es sey $a = 6$, $m = 2$; sonach würde $am = 12$ seyn. Wer sieht nicht, daß bey so bestellten Sachen das Verhältniß nicht gefallen, sondern vielmehr gestiegen sey? Um nun aus diesem Zweifel zu kommen, muß man annehmen, daß in fallenden Verhältnissen das kleinere Glied herauskomme, wenn man a nicht mit m, sondern mit $\frac{1}{m}$ multiplicirt; auf diese Weise wird das hintere Glied des fallenden Verhältniß

$$\begin{cases} = a \times \frac{1}{m} = \frac{a}{m} \\ = 6 \times \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Dieses nun vorausgesetzt, läßt sich die angesetzte allgemeine Formel der geometrischen Verhältnisse $a : am$ also lesen: In einem geometrischen Verhältniß findet sich das größere Glied, wenn man das kleinere mit dem Exponenten multiplicirt; das kleinere aber, wenn man das größere mit dem Exponenten dividirt.

45. Hieraus läßt sich vermittelst eines Vernunftschlußes der Zusatz herleiten, daß die ähnlichen Theile von gleich vervielfältigten Größen, z. B. die Hälften, die Drittheile, 2c. eben dasselbe Verhältniß beybehalten, welches den ganzen Größen selbst eigen war.

Neunte Tabelle.

Von Proportionen und Progreßionen der Größen.

I. Proportionen.

A. Erklärung einer Proportion.

Die Proportion ist eine Gleichheit zweyer Verhältnisse. Sie besteht darinn, daß beyde Verhältnisse eben dieselbe Differenz, oder denselben Exponenten haben. Z. B. die nachstehenden 4 Zahlen 1, 2, 3, 4, stehen in einer Proportion, weil sowohl die beyden erstern, als die beyden letztern, wenn man sie in Verhältnisse setzet, eben dieselbe Differenz, nämlich 1 haben. So stehn auch die unbestimmten Größen a, $a+d$, b, $b+d$ in einer Proportion, weil sowohl die beyden erstern, als die beyden letztern ein gleiches Verhältniß und einerley Differenz d geben.

B. Zeichen der Proportion.

Die Gleichheit zweyer Verhältnisse wird durch zween unter einander gezogene Striche (=) angemerkt.

Z. B. $1:2=3:4$. Das ist, 1 verhält sich zu 2 wie 3 zu 4.

$$a:a+d=b:b+d$$
$$a:am=b:bm.$$

C. Namen der Größen in Proportionen.

Die äußern Glieder der Proportion werden das vördere Glied des ersten, und das hintere des letzten Verhältniß „

Die mittlern Glieder der Proportion werden das hintere Glied des ersten, und das vördere Glied des letzten Verhältniß genennt. In der nachstehenden Proportion 2:6=4:12 sind 2 und 12 die äußern, 6 und 4 die mittlern Proportionsglieder.

D. Arten der Proportionen.

Die arithmetische Proportion, welche aus zwey gleichen arithmetischen Verhältnissen „

Die geometrische Proportion, welche aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen besteht. Die nächstfolgende Proportion 1:2=3:4 ist eine arithmetische, aber 2:4=3:6 ist eine geometrische Proportion.

Die stetige Proportion (proportio continua), worinn die mittlern Glieder einerley sind. Z. B. 1:2=2:3; 2:4=4:8. (46 Anm.)

Die unstetige Proportion (proportio discreta), worinn die mittlern Glieder verschieden sind.

E. Allgemeine Eigenschaften der Proportionen.

I. In arithmetischen Proportionen ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich.

Demnach wenn in der allgemeinen Formel der arithmetischen Proportion $a : a \pm d = b : b \pm d$ die beyden äußern Glieder a und $b \pm d$ addirt werden, so ist die Summe: $a + b \pm d$. Eben dieselbe Summe wird gefunden, wenn man die beyden mittlern Glieder $a \pm d$ und b addirt. (47 Anm.)

II. In geometrischen Proportionen ist das Product aus den beyden äußern Gliedern dem Producte aus den beyden mittlern gleich.

So=

Sonach wenn in der Formel der geometrischen Proportion $a : am = b : bm$ das erste Glied a mit dem letzten bm multiplicirt wird, ist das Product $= abm$. Eben dasselbe Product wird gefunden, wenn man die mittlern Glieder am und b mit einander multiplicirt. (48 Anm.)

II. Progreßionen.

A. Erklärung einer Progreßion.

Eine Progreßion heißt eine Reihe Größen, welche in stetigen Proportionen auf einander folgen.

B. Arten der Progreßionen.

Die arithmetische Progreßion, worinn die Glieder in einer arithmetischen Proportion „

Die geometrische Progreßion, worinn die Glieder in einer geometrischen Proportion stehn.

C. Zeichen der Progreßionen.

Die arithmetische wird mit zween durch einen Strich getheilten Puncten ÷ „

Die geometrische mit vier dergestalt getheilten Puncten ∺ angemerket. Z. B.

÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. ist eine arithmetische „

∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64 eine geometrische Progreßion.

D. Allgemeine Eigenschaften der Progreßionen.

I. Die allgemeine Formel der arithmetischen steigenden Progreßion läßt sich also angeben:

$$\div\, a.\ a + d.\ a + 2d.\ a + 3d.\ a + 4d.\ a + 5d \text{ ꝛc.}$$

der fallenden: $\div\, a.\ a - d.\ a - 2d.\ a - 3d.\ a - 4d$ ꝛc.

II. Die allgemeine Formel der geometrischen Progreßion überhaupt ist: ∺ $a.\ am.\ am^2.\ am^3.\ am^4.$ (S. 44 Anmerk.)

III. In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äußern Glieder gleich der Summe zweyer mittlern, die gleich weit von den äußern abstehn.

IV. In einer geometrischen Progreßion ist das Product der beyden äußersten Glieder gleich dem Producte zweyer mittlern, die gleich weit von den äußersten entfernet sind. (49 Anm.)

Anmerkungen.

46. Man drückt die stetigen Proportionen, wenn sie arithmetisch sind, mit nachstehendem Zeichen ∸, wenn sie geometrisch sind also ∺ aus. Z. B. ∸ a, b, c; ÷ 1, 2, 3; ∺ a, b, c; ∺ 2, 4, 8. Das zweyte Glied wird hier das mittlere Proportionsglied genennet; die Proportion aber wird dergestalt ausgesprochen: a verhält sich zu b wie b zu c. Oder 2 verhält sich zu 4 wie 4 zu 8.

47. Hieraus nun werden häufige Aufgaben aufgelöset; wir wollen allein der nothwendigsten gedenken. Man kann

1) Aus drey gegebnen arithmetisch proportionirten Gliedern (1, 2, 3) das vierte finden, wenn man die mittlern Glieder addirt, und von der Summe das erste Glied subtrahirt. Z. B. Es sey $1:2=3:x$; so ist $x=2+3-1=4$.

2) Aus zwey gegebnen Gliedern (2 und 6) das mittlere Proportionsglied finden; wenn man die-

dieselben addirt, und die Summe mit 2 dividirt. Z. B. $2:x=x:6$, so ist $x=\frac{2+6}{2}=4$.

3) Aus zwey gegebnen Gliedern (2 und 4) das dritte finden; wenn man das zweyte Glied mit 2 multiplicirt, und das erste davon abzieht. Z. B.

$2:4=4:x$; so ist $x=(2\times4)-2=8-2=6$.

Der Beweis dieser Auflösungen beruhet darinn, daß in allen diesen Fällen die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich ist.

48. Lasset uns diesen Lehrsatz auf etliche Aufgaben anwenden. Man wird demnach

1) Aus drey gegebnen geometrisch proportionirten Gliedern (2, 4, 3) das vierte finden, wenn man die mittlern Glieder mit einander multiplicirt, und das Product mit dem ersten Gliede dividirt.

Z. B. $2:4=8:x$; so ist $x=\frac{4\times8}{2}=\frac{32}{2}=16$.

2) Aus zwey gegebnen Gliedern (2 und 8) das mittlere Proportionalglied finden; wenn man dieselben mit einander multiplicirt, und aus dem Producte die Quadratwurzel zieht.

Z. B. $2:x=x:8$; so ist $x=\sqrt{(2\times8)}=\sqrt{16}=4$.

3) Aus zwey gegebnen Gliedern (2 und 6) das dritte finden; wenn man das zweyte Glied mit sich selbst multiplicirt, und dies Quadrat mit dem ersten Gliede dividirt. Z. B. $2:6=6:x$; so ist $x=\frac{6\times6}{2}=\frac{36}{2}18$.

In

In diesen Aufgaben sind alle Arten der Regel de Tri begriffen.

Die Glieder einer Proportion können auf verschiedene Weisen versetzet werden, ohne hierdurch die Proportion aufzuheben. Denn weil sich eine jede Proportion auf diese allgemeine Formel $a : am = b : bm$ bezieht; so folget, daß alle die Veränderungen, welche mit dieser Formel ohne Verlust der Proportion vor sich gehen können, auch in den übrigen Proportionen statt finden müssen. Es läßt sich aber die obbesagte Formel ihrer Proportion unbeschadet, auf verschiedene Weisen verändern. Wir theilen hier einige Beyspiele mit, wonach alle andere geometrische Proportionen versetzt werden mögen.

Wenn $a : am = b : bm$, so ist auch

$$am : a = bm : b$$
$$a : b = am : bm$$
$$a + am : am = b + bm : bm$$
$$a + am : a = b + bm : b$$
$$a - am : am = b - bm : bm$$
$$a - am : a = b - bm : b$$
$$a : a + am = b : b + bm$$
$$a : a - am = b : b - bm$$

Die angehenden Algebristen würden hier eine nützliche Bemühung unternehmen, wenn sie diese allgemeinen Beyspiele in bestimmte Zahlen versetzen wollten. Denn andere Vortheile, die diesem unternehmen anhängig sind, zu geschweigen, würden sie hierdurch klare, deutliche und vollständige Begriffe jener Wahrheiten erlangen, welche ihrem Geiste noch allzu unkennbar, und mit

dem

dem Schleyer der Buchstaben gleichsam umhüllet vorkommen.

Wir müssen an dieser Stelle noch eine der wichtigsten algebrischen Wahrheiten nachholen, nämlich: daß die Factorn gleicher Producte in einem verkehrten Verhältniß gegen einander stehn. Denn bildet euch ein, daß die nachstehenden Producte ad und bc einanger gleich sind. Wenn man nun beyde Producte mit bd dividirt, so kömmt $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$; oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ heraus. Es ist aber gewiß, daß die Brüche den Exponenten desjenigen Verhältniß angeben, das der Nenner gegen seinen Zähler hat; demnach ist $b:a=d:c$.

49. In allen Gattungen der Größen kommen die geometrischen Verhältnisse am häufigsten vor. Wenn also die Ausdrücke: **Verhältniß, Proportion, Analogie** und **Progreßion** ohne Beysatz gebraucht werden, so wird allemal das geometrische Verhältniß, die geometrische Proportion, Analogie und Progreßion verstanden. Die Anmerkung ist bey Lesung der mathematischen und philosophischen Bücher unentbehrlich.

II. Ver-

II. Vergleichung der Größen von vermischten Arten.

Zehnte Tabelle.

Von den algebrischen Aufgaben.

I. Ueberhaupt.

A. Erklärungen

1) Einer algebrischen Aufgabe.

Eine algebrische Aufgabe ist ein Satz, worinn verlangt wird, daß aus gegebnen und bekannten Größen der Werth einer oder mehrerer unbekannten gefunden werde. Z. B. wenn man aus der gegebnen Summe zwoer Zahlen und ihrer Differenz die Zahlen selbst finden sollte. (50 Anm.)

2) Der Bedingnisse der Aufgabe.

Bedingnisse der Aufgabe werden die Verhältnisse genennet, worinn die bekannten und gegebnen Größen gegen die unbekannten stehn. (51 Anm.)

3) Der Auflösung der Aufgabe.

Eine algebrische Aufgabe auflösen, heißt den Werth einer jeden unbekannten Größe, welche in der Aufgabe mit begriffen ist, finden; oder allenfalls zeigen, daß man den Werth der unbekannten Größen wegen einiger Wiedersprüche, die sich in den Bedingnissen der Aufgabe äußern, nicht finden könne. (52 Anm.)

B. Arten der Aufgaben.

Die bestimmte Aufgabe, worinn entweder nur eine Auflösung, oder gewißlich eine gewisse und bestimmte Zahl der Auflösungen statt hat.

Die unbestimmte Aufgabe, worinn unzählig viele Auflösungen statt finden können.

C. Grundsätze der Auflösung.

1) Benennung.

a) Erklärung der Benennung.

Die Benennung (denominatio) ist ein algebrischer Ausdruck der in der Aufgabe befindlichen Bedingnisse. Sie geschieht, wenn man sowohl die bekannten als unbekannten Größen mit gehörigen Buchstaben anzeiget.

b) Gesetze der Benennung.

I. Die bekannten Größen sollen mit den ersten Buchstaben des kleinen Alphabeths „

II. Die unbekannten Größen aber mit den letzten Buchstaben des obbesagten Alphabeths angezeigt werden.

Z. B. die nachstehenden Buchstaben *a, b, c, d, e, f* &c. geben die bekannten

" " " aber *z, y, x, u, t* &c. die unbekannten Größen an.

III. Größen, die im gewissen Verhältniß gegen einander stehn, sollen, so viel es thunlich ist, mit eben denselben Buchstaben angemerket werden.

Z. B.

Z. B. Man hätte mit zwoen ungleichen Größen zu thun, wovon die eine dreymal größer als die andere wär; das ist, mit Größen, welche 3 zum Verhältnißexponenten haben. In diesem Falle nun würde es allzu schülerisch lauten, wenn man die eine x, die andere y nennen wollte; viel geschickter wird die Benennung verrichtet, wenn die kleinere Zahl mit x, die größere mit $3x$, oder allenfalls: die größere mit x, die kleinere aber mit $\frac{1}{3}x$ angegeben wird. (54 Anm.)

IV. Größen, die in gewisser Proportion gegen einander stehn, sollen, so weit es möglich ist, mit gleichen Buchstaben angesetzet werden. (55 Anm.)

V. Die einmal angenommenen Buchstaben sollen währender Aufgabe nicht abgeändert werden. (56 Anm.)

2) Gleichung.

a) Erklärung der Gleichung.

Die Gleichung (æquatio) heißt ein algebrischer Satz, wodurch das Bedingniß einer algebrischen Aufgabe ausgedrückt wird. (57 Anm.) Sie geschieht wenn man gleiche Größen mit gleichgültigen Ausdrücken anzugeben sucht, um dadurch in Stand gesetzt zu werden, das Bekannte und das Unbekannte in eine Verbindung zu bringen.

b) Zeichen der Gleichung.

Das Zeichen der Gleichung sind zween über einander gezogene Striche =

c) Theile der Gleichung.

Das vördere Glied der Gleichung werden die sämmtlichen Größen genennet, welche vor dem Gleichungszeichen gestellet sind.

Das

Das hintere Glied der Gleichung heißen die sämmtlichen Größen, welche nach dem Gleichungszeichen zu stehen kommen. (58 Anm.)

Z. B. In der nachstehenden Gleichung $x^3 = 2ab + b^3$ ist x^3 das vördere, $2ab + b^3$ das hintere Gleichungsglied.

d) Arten der Gleichung.

Die Gleichung vom ersten Grade, worinn die unbekannte Größe von der ersten Potenz ist. Z. B. $x = 2ab + c$.

Die Gleichung vom zweyten, dritten rc. Grade, worinn die unbekannte Größe von der zweyten, dritten rc. Potenz ist. (59 Anm.)

Z. B. $\begin{cases} x^2 = 2a - 3b \\ x^3 = b^2 + 2d - 4f^2. \end{cases}$

Die einfache Gleichung (æquatio simplex), worinn nur eine Potenz der unbekannten Größe vorkömmt.

Z. B. $\begin{cases} x = b + c - 2d \\ x^3 = a + 3ab + b^2. \end{cases}$

Die befaßte Gleichung (æquatio adfecta), worinn verschiedene Potenzen derselben unbekannten Größe vorkommen.

Z. B. $\begin{cases} x^3 - ax = c^3 + cd - 3f. \\ x^3 + ax^2 = ab + 6ac - c^2. \end{cases}$

e) Gesetze der Gleichungen.

I. Man soll das gegebne und bekannte von dem unbekannten genau unterscheiden.

II. Man soll bedacht seyn, nicht nur den Hauptgegenstand der Aufgabe wohl zu begreifen, sondern auch alle Umstände und Bedingnisse, womit die Aufgabe eingekleidet ist, aus einander zu setzen.

III. Nach der Vorschrift der gegebnen Bedingnisse soll man zween Ausdrücke stellen, welche ein gleiches bedeuten. Zwischen diese beyde Ausdrücke soll das Gleichungszeichen = eingeschaltet werden.

IV. Man soll so viel Gleichungen stellen, als viel Bedingnisse in der Aufgabe enthalten sind. (60 Anm.)

3) Ausführung.

a) Erklärung der Ausführung.

Die Ausführung (reductio) ist eine Absonderung der bekannten Größen von den unbekannten. Sie geschieht, wenn man durch Hülfe der algebrischen Operationen es dahin zu bringen sucht, daß man eine endliche Gleichung findet, worinn in dem einen Gleichungsgliede lauter bekannte Größen, in dem andern aber eine unbekannte Größe zu stehn kommen.

b) Gesetze der Ausführung.

aa) Allgemeines.

Die Operationen, wodurch man das Unbekannte von dem Bekannten absondert, müssen denjenigen, wodurch sie mit einander vermenget worden, grade entgegen gesetzt seyn. (61 Anm.)

bb) Besondere.

I. Wenn eine unbekannte Größe mit einer bekannten durch die Addition verbunden ist; muß die bekannte von beyden Gleichungsgliedern subtrahirt, oder welches in eines hinausläuft, in das andere Gleichungsglied mit wiedrigen Zeichen versetzet werden.

Z. B. Es sey die Gleichung: $x+b=a$

$$\begin{array}{r} x+b=a \\ -b-b \\ \hline x=a-b. \end{array}$$

II. Wenn

II. Wenn die unbekannte Größe mit einer bekannten durch die Subtraction verbunden ist; muß die bekannte zu beyden Gleichungsgliedern addirt, das ist, in das andere Gleichungsglied mit wiedrigen Zeichen versetzt werden.

Z. B. Es sey die Gleichung: $x - b = a$
$+ b + b$

$x = a + b$. (62 Anm.)

III. Wenn die unbekannte Größe mit einer bekannten multiplicirt ist; müssen beyde Gleichungsglieder mit dem bekannten Factor dividirt werden.

Z. B. Es sey die Gleichung: $ax = ab + ac$
$:a \quad :a$

$x = b + c$.

IV. Wenn die unbekannte Größe mit einer bekannten dividirt ist, müssen beyde Gleichungsglieder mit dem bekannten Divisor multiplicirt werden.

Z. B. Es sey die Gleichung: $\frac{x}{c} = a + 2b + c^3$
$\times c \quad \times c$

$x = ac + 2bc + c^4$.

(63 Anmerk.)

V. Wenn in dem einen Gleichungsgliede lauter bekannte Größen vorhanden sind, das andere Glied aber, worinn die unbekannte Größe enthalten ist, eine vollständige Potenz, z. B. ein Quadrat, einen Cubus rc. ausmacht, so soll aus diesem die Wurzel wirklich gezogen, jenem aber das Wurzelzeichen vorgesetzet werden. Im Fall aber die unbekannte Größe ein Wurzelzeichen bey

sich führte; müßten die beyden Glieder zu derselben Potenz, welche der Wurzelexponent angiebt, erhoben werden.

Z. B. $\begin{cases} x^3 = ab + b \\ \sqrt[3]{\ } \quad \sqrt[3]{\ } \\ \hline x = \sqrt[3]{(ab+b)} \end{cases}$ und $\begin{cases} \sqrt{x} = a + b \\ \sqrt{x^2}, (a+b)^2 \\ \hline x = a^2 + 2ab + b^2. \end{cases}$

(64 Anmerk.)

VI Wenn das Gleichungsglied, worinn die unbekannte Größe mit begriffen ist, keine vollständige Potenz ausmacht; muß die Potenz ergänzet werden. Dieses geschieht nun, wenn man zu beyden Gleichungsgliedern dasjenige hinzusetzet (nach Anweisung der 25 und 26 Anmerk.) was zu den wesentlichen Theilen der Potenzen noch mangeln dürfte, und dann die Wurzel auszieht.

Z. B. $\begin{cases} x^2 + 2bx = ac + m \\ \quad\quad + b^2 \quad + b^2 \\ \hline x^2 + 2bx + b^2 = ac + m + b^2 \\ x + b = \sqrt{(ac + m + b^2)} \\ x = \sqrt{(ac + m + b^2)} - b. \end{cases}$

VII. Die Versetzung der unbekannten Größen aus einem Gliede in das andere muß also veranstaltet werden, daß in der endlichen Gleichung die unbekannte Größe das Zeichen + gewinnen könne.

VIII. Man wende diese Gesetze so lange an, bis man es dahin gebracht hat, daß in dem einen Gleichungsgliede lauter bekannte Größen, in dem andern aber nur eine unbekannte zu stehn kommen.

II. Ins besondere.

A. Aufgaben, worinn bloß einfache Gleichungen vorhanden sind.

1) Bestimmte Aufgaben

a) von einer unbekannten Größe.

Man benennet die sowohl bekannten als unbekannten Größen, bringet sie unter die gehörige Gleichung und führet die Gleichung aus. Z. B.

Aufgabe: Von einem feindlichen Corps sind nicht mehr als 1000 Mann übergeblieben. $\frac{1}{3}$ Desselben wurde in die Pfanne gehauen, $\frac{1}{4}$ zu Kriegsgefangenen gemach. Nun fragt es sich, 1) wie stark das Corps, 2) wie zahlreich die Todten, und 3) wie viel der Gefangenen gewesen.

Auflösung. Die Benennung: Es heiße das gesammte Corps x; so werden die Todten $\frac{1}{3}x$, die Kriegsgefangenen $\frac{1}{4}x$ heißen können. (65 Anm.)

Die Gleichung. Weil hier nur eine unbekannte Größe vorkömmt, so kann man nicht zweifeln, daß auch nur eine Gleichung gestellt werden muß. Und da es aus den Bedingnissen der Aufgabe erhellet, daß die Zahl der Todten, der Gefangenen und der Rest von 1000 Mann das ganze Corps ausgemacht haben, so dürfte die Gleichung solchergestalt ausfallen:

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 1000.$$

Die Ausführung. Man hebe zuvörderst die Brüche auf, so wird $12x = 4x + 3x + 12000$. Dann addire man $4x$ und $3x$ in eine Summe, und versetze

solche unter einem wiedrigen Zeichen in das vördere Gleichungsglied; wird $12x - 7x = 12000$. Subtrahire man $7x$ von $12x$, wird $5x = 12000$. Mit dem Factor 5 dividire man beyde Gleichungsglieder, wird $x = \frac{12000}{5} = 2400$.

Es ist demnach das ganze Corps $= x = 2400$. Die Zahl der Todten $= \frac{1}{3}x = \frac{2400}{3} = 800$; die Zahl der Gefangenen $= \frac{1}{4}x = \frac{2400}{4} = 600$. (66 Anm.)

Hier wird die ganze Auflösungsmethode gleichsam in einem Bilde dargestellet:

$$x = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x + 1000$$
$$12x = 4x + 3x + 12000$$
$$12x = 7x + 12000$$
$$12x - 7x = 12000$$
$$5x = 12000$$
$$x = \frac{12000}{5} = 2400.$$

b) Von mehrern unbekannten Größen.

Man benennt die Größen: bringt sie unter so viele Gleichungen, als es die verschiedenen Bedingnisse der Aufgabe fordern: führet die Gleichungen aus. Dieses geschieht nun, 1) wenn man alle Zwischengleichungen bis auf eine, worinn nur eine unbekannte Größe vorkömmt, aufzuheben sucht. 2) Wenn man diese Gleichungen vollends ausführt. (67 Anm.) Z. B.

Aufgabe: Ihr Herren, spricht ein Gastwirth zu seinen Gästen, wenn ein jeder aus euch 4 Thaler zahlte, würdet ihr 20 Thaler weniger zahlen, als ihr schul-

schuldig seyd: zahlte aber ein jeder 5 Thaler, so würdet ihr noch 30 Thaler zu verzehren haben. Man fragt: 1) Wie viel der Gäste; 2) wie groß ihre Schuldigkeit gewesen.

Auflösung. Die Benennung. Es sey die Zahl der Gäste x, ihre Schuldigkeit y.

Die Gleichung. Weil man mit zwo unbekannten Größen, die in keinem Verhältniß gegen einander stehn, zu thun hat, darum müssen auch zwo Gleichungen gestellet werden. Hier sind sie: $4x = y - 20$ und $5x = y + 30$.

Die Ausführung. Lasset uns die erste Gleichung reduciren, um das x allein zu bekommen: $4x = y - 20$

$$x = \frac{y - 20}{4}$$

Diesen gefundnen Werth substituire man in der zweyten Gleichung anstatt x, dadurch wird $5x = y + 30$ folgende Gestalt bekommen: $\frac{5y - 100}{4} = y + 30$

Man hebe die Brüche auf: $5y - 100 = 4y + 120$
subtrahire $4y$: $y - 100 = 120$
addire $+ 100$: $y = 120 + 100 = 220$.

Sonach war die Schuldigkeit der Gäste $= y = 220$ Thl.
Die Zahl der Gäste $= x = \frac{y - 20}{4} = \frac{220 - 20}{4} = \frac{200}{4} = 50$.

2) Unbestimmte Aufgaben.

Man benennt die Größen, bringt sie unter die gehörige Gleichung und führt die Gleichung aus. (68 Anm.)

B. Aufgaben, worinnen befaßte Gleichungen vorhanden sind.

1) Gesetze, nach welchen die befaßte Gleichungen ausgeführet werden.

Nebst den allgemeinen Reductionsgesetzen müssen noch die nachstehenden besondern Regeln angewendet werden.

I. Wenn das Quadrat der unbekannten Größe mit einer bekannten multiplicirt oder dividirt ist, macht man solches von dem bekannten Factor oder Divisor los.

II. Wenn das Quadrat der unbekannten Größe verneinend ist, versetzt man es in das andere Gleichungsglied, damit es wirklich werde. Denn ein verneinendes Quadrat ist für sich selbst je ein unmöglich Ding.

III. Die in der Gleichung befindlichen Größen sollen dergestalt gestellet werden, daß dem Quadrat der unbekannten Größe die erste Stelle; den mit den unbekannten vermischten Größen die zweyte Stelle; den schlechterdings bekannten Größen die dritte Stelle eingeräumt, und dann die Gleichung gleich Nichts gemacht werde. (S. 52 Anmerk.)

IV. Wenn mehrere vermischte Größen vorhanden sind, sollen solche um mehrer Deutlichkeit willen, unter einander geschrieben und für eine Classe des Gliedes geachtet werden. Ein gleiches soll auch von den bekannten Großen gelten.

Bey=

Beyspiele.

I) $5ax^2 + bx^2 - ab^2 = cx - bx$

$$5ax^2 + bx^2 - ab + bx - cx = 0$$

$$: 5a + b$$

$$\frac{x^2 + bx - cx - ab^2 = 0}{5a + b}$$

$$x^2 + \frac{bx}{5a+b} - \frac{ab}{5a+b} = 0$$

$$\frac{-cx}{5a+b}$$

II) $x^2 + \frac{1}{4}b^2 + x + \frac{1}{2}b = a^2 d^2 - \frac{1}{4} - bx$

$$x^2 + bx + x + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 - a^2 d^2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\begin{array}{l} x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = 0 \\ \quad + x + \frac{1}{2}b \\ \quad\quad + \frac{1}{4} \\ \quad\quad - a^2 d^2 \end{array}$$

2) Gesetze, nach welchen man untersuchen kann, ob in der gegebnen Gleichung ein vollständiges oder ein mangelhaftes Quadrat enthalten sey.

I. Man führet die gegebne Gleichung nach obigen Vorschriften genau aus, und scheidet die bekannten von den unbekannten vermittelst der Classen.

II. Man hat wohl Acht, ob in der Classe der bekannten Größen ein Quadrat zu finden, dessen Wurzel gleich sey der halben Summe derjenigen bekannten Größe, wodurch die unbekannte Größe in der zweyten Classe multiplicirt ist; läßt sich nun ein solches Quadrat finden, so

 soll

soll es neben der unbekannten Größe gelassen, die übrigen bekannten Größen aber in das andere Gleichungsglied versetzet werden; auf diese Weise erhaltet man ein reines und vollständiges Quadrat. Im Fall aber ein solches Quadrat nicht vorkäme, so dürfte man untrüglich urtheilen, daß die gegebne Gleichung kein vollständiges, sondern nur ein mangelhaftes Quadrat in sich begreife, zu dessen Ergänzung noch das Quadrat des zweyten Theils der binomischen Wurzel zugesetzt werden muß. (69 Anm.)

3) Gesetze, nach welchen man die Aufgaben, worinnen befaßte Gleichungen vorhanden sind, auflösen soll.

I. Man führet die Aufgabe bis zur endlichen Gleichung aus.

II. Man vertheilt die Größen in ihre Classen.

III. Man sucht, ob ein vollständiges Quadrat vorhanden sey: und im Fall es sich daselbst finden läßt, bringt die Gleichung in solche Stellung, daß in dem einen Gleichungsgliede das vollständige Quadrat allein, in dem andern aber die übrigen bekannten Größen zu stehn kommen.

IV. Man zieht aus beyden Gleichungsgliedern die Wurzel.

V. Man führt die Gleichung vollends aus. (70 Anm.)

VI. Im Fall sich daselbst kein vollständiges Quadrat finden läßt, läßt man die in der ersten und zweyten Classe befindlichen Größen an ihren Stellen stehn, und trägt die bekannten Größen aus der dritten Classe in das andere Gleichungsglied hinüber; ergänzt das Quadrat; welches geschieht, wenn man zu beyden Gleichungsgliedern

das

das Quadrat von der halben Summe der Coefficienten der zweyten Classe addirt. Das übrige kömmt mit dem obigen überein. (71 Anm.)

Anmerkungen.

50. Die algebrischen Aufgaben sind der wesentlichste Grund von allen Gattungen der Analysis. Durch das Wörtchen Analysis wird nichts anders verstanden, als eine Methode, die vorgetragenen Aufgaben durch Hülfe der algebrischen Rechnungs- und Zeichnungsarten richtig aufzulösen. Die ältesten Analysten verrichteten ihr Werk mit Zahlen; womit sie dann nicht allzu tief gekommen sind. Seitdem aber Vieta im verflossenen Jahrhundert sich der Buchstaben anstatt der Ziffern zu bedienen angefangen, gieng der sämmtlichen Analysis, und vermittelst dieser, allen mathematischen und physischen Wissenschaften eine neue Sonne auf. Heutiges Tages sieht man dieselbe beynahe an den Gipfel der Vollkommenheit gestellt. Was hierzu des Cartes, Wallis, Renaldin, Huygens, Newton, Leibnitz, Wolf, Stepling, Euler, Boscowich, Clairaut, de la Caille, Mako und andere erhabene Geister mehr beygetragen haben, ist der gelehrten Welt nicht unbekannt.

51. Bloß aus den Bedingnissen der Aufgabe wird verstanden, unter welchen Umständen die bekannten Größen mit den unbekannten in Gleichheit stehen können. Z. B. Man soll eine Zahl finden, welche, wenn sie zu sich selbst addirt wird, eine Summe giebt, die dem Quadrat derselben Zahl gleich ist; in diesem Fall nun ist die Gleichheit der Summe und des Quadrats die Bedingniß, unter welcher das Unbekannte dem Bekannten gleich ist.

52. Der-

52. Dergleichen Wiederspruch dürfte in der nachstehenden Aufgabe entdecket werden: Man soll zwo gerade Zahlen finden, welche zu ihrer Differenz 3 haben. Denn es ist etwas unmögliches, daß zwo gerade Zahlen eine ungerade Summe ausmachen, folglich eine ungerade Differenz geben können. Sonach könnte das Bedinguiß von geraden Zahlen nicht gelten, und daher das Unbekannte nicht entfaltet werden.

53. Wir wollen beyde Arten der Aufgaben mit einem Beyspiele erläutern. Bildet euch ein, daß zwo Zahlen, welche zu ihrer Differenz 3 haben, gesucht werden. In diesem Fall nun würde die Aufgabe unbestimmt seyn, weil es unzählich viele Zahlen von dieser Art geben kann: denn $5-2=3$; $6-3=3$; $8-5=3$; $16-13=3$ ꝛc. Würde aber zum vorigen Bedingnisse noch dieser Umstand hinzugesetzt: daß die Summe beyder Größen 15 ausmache; so würde hierdurch die Aufgabe bestimmt werden; und die Zahlen 6 und 9 dürften wohl die einzigen seyn, woran die zwey Bedingnisse erfüllet werden möchten.

54. Es ist demnach eine gewisse Folge, daß die gleichen Größen, oder ihre Theile keineswegs mit verschiedenen, sondern allemal mit eben denselben Buchstaben angemerket werden sollen. Man kann den Unterschied der Theile bey gleichen Größen genugsam durch Hülfe der Bruchnenner, oder der Coefficienten bestimmen. Gesetzt, das Ganze hieße a; so könnte dessen Drittheil mit $\frac{1}{3}a$, oder $\frac{a}{3}$, dessen Fünftheil mit $\frac{a}{5}$ angegeben werden. Allenfalls geht es auch an, daß man das gegebne Drittheil a, und das Ganze, $3a$ nenne.

55. Z. B. Man hätte mit zwoen ungleichen Größen zu thun, wovon die eine das erste, die andere das

letzte

letzte Glied einer arithmetischen stetigen Proportion wäre; so müste das vierte Glied (im Fall das erste x, und die Differenz d hieße) in der steigenden Proportion mit $x + 3\,d$, in der fallenden mit $x - 3\,d$ angezeigt werden. Ein gleiches läßt sich auch von der geometrischen Proportion anmerken. Denn wenn darinn das erste Glied x, der Exponent m heißt, muß das vierte Glied in der steigenden Proportion $x m^3$, in der fallenden $= \frac{x}{m^3}$ seyn. Man sieht schon, daß diese Lehren auch allenfalls in den Progreßionen statt haben müssen.

56. Dieses sind die allgemeinsten Gesetze der Benennung, worauf man in den algebrischen Aufgaben das Augenmerk vornehmlich wenden muß. Man bilde sich aber nicht ein, daß es die einzigen sind. Köpfe, die von einem aufgewecktern Geiste belebt, und in arithmetischen Wahrheiten, sonderlich in der Wissenschaft der Verhältnisse und Proportionen geübet sind, gerathen nicht selten auf Benennungsarten, welche zur Erkenntniß des Unbekannten viel ebener führen, als es die allgemeinen Gesetze nicht thun. Lasset uns die Sache in einem Beyspiele sehn. Gesetzt, man sollte aus der Summe zwoer Zahlen und ihrem Producte die Zahlen selbst finden. In diesem Fall werden uns zwo Zahlen gegeben: wir wissen nämlich, welches die Summe, und welches das Product der unbekannten Größen sey. Da nun solchergestalt die Summe und das Product bekannte Größen sind; so hätte man nach den allgemeinen Gesetzen die Summe mit a, das Product mit b angeben, die beyden unbekannten Zahlen aber, woraus diese Summe und dieses Product entstanden sind, x und y nennen können. Nichts ist gewisser, als daß man bey so getroffner Benennung sein Ab-

sehn

sehn erreichen, und den Werth von x und y würde haben finden können. Indessen erblickt ein witziger Geist eine viel geschicktere Benennungsart, folglich einen viel ebenern, kürzern und bequemern Weg zur Wahrheit. Denn macht er die Summe $= a$, das Product $= b$ und die halbe Differenz der beyden unbekannten Zahlen, welche gleichfalls unbekannt ist $= x$, so wird er den nachstehenden arithmetischen Lehrsatz dabey anwenden können: **Wenn man zu der halben Summe zwoer Zahlen die halbe Differenz addirt, so kömmt die größere, und wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt, die kleinste von 'ihnen heraus.** Nun hat er die Summe mit a und die halbe Differenz mit x angegeben, so müßte also die größere Zahl mit $\frac{1}{2} a + x$, die kleinere aber mit $\frac{1}{2} a - x$ angezeigt werden.

57. Ist die Gleichung ein Ausdruck des Bedingniß, so folget, daß im Fall mehrere Bedingnisse in eben derselben Aufgabe vorhanden wären, man auch mehrere Gleichungen anstellen müßte; und überhaupt zwo Gleichungen, wenn zwey Bedingnisse, drey, vier ꝛc. wenn drey, vier ꝛc. Bedingnisse vorkämen.

58. Man muß an dieser Stelle erinnern, 1) daß man ohne Verletzung der Gleichheit die Gleichungsglieder verwechseln, und sonach das vördere Glied zum hintern Gliede machen könne. Also verliert dabey die Wahrheit nichts, man möge $x = 2ab + c$, oder $2ab + c = x$ hinschreiben. 2) Daß manchmal Fälle vorstoßen können, worinn das eine Glied $= 0$ oder Nichts wird. Dieses nun kan sich ereignen, wenn in dem andern Gleichungsgliede die wirklichen und die verneinenden Größen einander allerdings aufheben. Von dieser Art dürfte

die

die nachstehende Gleichung seyn: $4ab - 3ab + 8 - ab - 10 + 2 = d^2 + 4e - x$.

59. Wir schränken uns in diesem algebrischen Aufsatze dahin ein, daß wir lediglich dasjenige abhandeln wollen, was zu den Gleichungen vom ersten und zweyten Grade gehöret. Diesemnach entziehn wir uns mit Bedacht allem dem, was die Gleichungen von höhern Graden belangen kann. Unsere Absicht geht zuvörderst dahin, den angehenden Algebristen einigen Nutzen zu verschaffen. Sollten nun einige aus dieser Zahl das Vermögen und den Willen besitzen, sich höher hinauf zu schwingen, so werden sie leichterdings dahin gelangen können, sofern sie dasjenige, was in gegenwärtige Tabellen gefaßt worden ist, wohl begriffen, und darinn einige Fertigkeit durch die Uebung erlanget haben.

60. Man sollte aus der gegebnen Summe zwoer Zahlen und ihrer Differenz die Zahlen selbst finden. Die Summe als eine bekannte Größe dürfte $= a$, die Differenz $= b$ seyn. Unter den unbekannten Größen könnte die kleinere x, die größere aber y heißen: alles nach den allgemeinsten Gesetzen der Benennung. Die Gleichung nun zu finden, kann so viel Mühe nicht kosten. Denn wenn man sich nur des arithmetischen Satzes erinnern will, daß die Summe zwoer Zahlen entsteht, wenn man die eine zu der andern addirt, so wird man leichtlich auf den Einfall gerathen, daß $a = x + y$ sey. Dieses wäre also eine Gleichung. Da nun so viele Gleichungen gestellet werden müssen, als viele Bedingnisse in der Aufgabe vorkommen; hier aber zwey Bedingnisse vorhanden sind, so muß noch die zweyte Gleichung gesucht werden. Es ist die Differenz zwoer Zahlen bekannt und b genennt worden; nun entsteht die Differenz, wenn man die kleinere Zahl von der größern

abzieht: *y* ist die größere, *x* die kleinere Zahl; folglich ist $b=y-x$. Und dieses ist die zwente Gleichung.

Sollte es jemanden zu schwer ankommen, die Bedingnisse der aufgesetzten Aufgabe auseinander zu setzen, um hierdurch ihre Anzahl zu bestimmen; so könnte er allenfalls für eine Regel annehmen, daß so viele Gleichungen gestellet werden müssen, als viel unbekannte Größen, die in keinem Verhältnisse gegen einander stehen, in der Aufgabe selbst begriffen sind. Noch müßte die angenommene Regel mit folgenden Anmerkungen erläutert werden. 1) Im Fall man alle Bedingnisse der algebrischen Aufgabe mit so vielen Gleichungen ausgedrückt hat, als viel unbekannte Größen vorhanden sind, so wird man allemal auf eine endliche Gleichung verfallen können, worinn lediglich eine unbekannte Größe statt findet. Dieses kann man nun für ein Merkmaal ansehn, daß die Aufgabe bestimmet sey. 2) Im Fall aber wenigere Gleichungen, als die Zahl der unbekannten und keineswegs verwandten Größen zu fordern scheint, möchten gestellet werden; so würde man zu keiner endlichen Gleichung von einer unbekannten Größe gelangen können: vielmehr würde man sich genöthiget sehn, die Werthe einer oder mehrer unbekannten Größen nach Gutachten zu bestimmen. Dieses dann würde zum Zeichen dienen, daß die aufgesetzte Aufgabe aus der Art der unbestimmten seyn müsse. 3) Im Fall die Menge der Gleichungen größer ausfiele, als die Zahl der unbekannten, und durch kein Verhältniß verknüpften Größen ist, würde die Auflösung unmöglich werden; es wäre dann, daß aus den bestimmten Werthen der unbekannten Größen die überzähligen Gleichungen durch ein bloßes Ohngefähr mit entwickelt würden. Aufgaben von dieser Art werden **überbestimmte Aufgaben** (Problemata plus

quam determinata), genennt. Lasset uns dasjenige, dessen wir erwähnt haben, in einem Beyspiele betrachten. Gesetzt, man sollte zwo Zahlen unter folgenden Bedingnissen finden: 1) Daß die größere aus ihnen um 3 größer als die kleinere sey; oder arithmetisch davon zu sprechen: Zahlen, welche zu ihrer Differenz 3 haben; 2) daß ihre Summe genau 15 betrage. Man darf nicht zweifeln, daß diese Aufgabe bestimmt seyn müsse. Gewißlich würde ihre endliche Gleichung nur eine unbekannte Größe in sich enthalten, deren Werth durch das andere Gleichungsglied bestimmt werden dürfte. Wollte man aber noch ein drittes Bedingniß hinzufügen, nämlich daß die größere Zahl dem Quadrat der gegebnen Differenz gleich sey, so würden 3 Gleichungen und 2 unbekannte Größen vorkommen, und die Bedingnisse der Aufgabe bloß zufälliger Weise in den Zahlen 6 und 9 erfüllet werden können. Wollte man endlich die Aufgabe dahin einschränken, daß die beyden Zahlen ungerade Zahlen seyn müssen; so würde die Aufgabe einen Wiederspruch enthalten, weil es eine unmögliche Sache ist, daß ungerade Zahlen, wenn man sie von einander subtrahirt, eine gerade Differenz auswerfen. (S. die 52 Anmerk.)

Man kann endlich aus eigner Erfahrung getreulich versichern, daß die Kunst geschickte Gleichungen zu erfinden, eines der erhabensten Stücke in der Wissenschaft der Algebre sey. Wer solche aus dem Grunde begreifen will, muß 1) eine Fertigkeit in arithmetischen und geometrischen Wahrheiten überhaupt besitzen; insonderheit aber die Grund- und Lehrsätze von der Gleichheit und den Verhältnissen der Größen wohl inne haben. 2) Die von gelehrten Algebristen aufgelösten Aufgaben mit Fleiß durchgehen. 3) Die Hand zu algebrischen Operationen

selber anlegen. 4) Mit Witz und Scharfsinn von Natur versehen seyn.

61. Diese gegenseitige Operationen, wodurch das Bekannte von dem Unbekannten geschieden wird, beziehn sich hauptsächlich auf die Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Zeugung der Potenzen und Ausziehung der Wurzeln. Nur ist es niemals außer Acht zu lassen, daß man die Scheidungsarten in beyden Gleichungsgliedern zugleich vornehmen muß.

62. Wer deutliche Begriffe der arithmetischen Grundsätze besitzet, wird leichtlich die Ursache einsehn, warum bey der Veränderung der Größen, da man solche aus einem Gliede in das andere mit wiedrigen Zeichen versetzet, die Gleichheit der Glieder selbst unverändert bleibe: nur hat er nöthig sich zu erinnern, daß, wenn gleiches zum gleichen addirt, oder gleiches von gleichem subtrahirt wird, hier eine gleiche Differenz, dort eine gleiche Summe heraus kommen muß. Gewißlich, wenn man zu beyden Gliedern der nachstehenden Gleichung $x-b=a$ das b addirt, so kommet folgende Gleichung heraus: $x-b+b=a+b$, das ist, $x=a+b$; und wenn man von beyden Gliedern der Gleichung $x+b=a$ das b subtrahirt, so wird $x+b-b=a-b$, das ist, $x=a-b$ seyn. Wer sieht nicht, daß in diesen beyden Fällen ein gleiches zu gleichem addirt, und ein gleiches vom gleichen subtrahirt werde? Nun so bestehn beyde Operationen bloß darinn, daß man die bekannte Größe von einem Gleichungsgliede in das andere mit wiedrigen Zeichen versetzet; sonach wird durch die Versetzung der Größen aus einem Gliede in das andere mit wiedrigen Zeichen die Gleichheit der beyden Glieder nicht verändert. Aus diesem Grunde nun fließen folgende Wahrheiten: 1) Kann eine jede Größe bloß vermittelst der obbesagten Ver-

Versetzung aus einer wirklichen zur verneinenden, und aus dieser zu jener werden. Diesemnach wenn $a+b=r-x$, so ist $a=r-x-b$, und $a+b+x=r$. 2) Kann eine jede Gleichung in nichts verwandelt werden; nämlich im Fall, worinn alle Größen aus einem Gliede in das andere mit veränderten Zeichen übergetragen worden sind. Sonach wenn $a+b=r-x$, ist $a+b-r+x=0$. Diese Art der Versetzung hat einen großen Nutzen in der Ausführung höherer Gleichungen. 3) Können gleiche Größen in beyden Gleichungsgliedern, sofern sie gleiche Zeichen haben, ohne Verlust der Gleichung ausgestrichen werden. Demnach wenn $a^3-2cd=3b^2-2cd$, so ist $a^3=3b^2$. In der That eine verneinende Größe aus beyden Gleichungsgliedern ausstreichen, kann nichts anders seyn, als die nämliche Größe zu beyden Gliedern addiren; und wer eine wirkliche Größe in beyden Gleichungsgliedern aufhebet, subtrahirt in der That dieselbe Größe von beyden Gleichungsgliedern.

63. Man erinnere sich abermal gewisser Grundsätze, wenn man durch die Multiplication, oder Division, durch die Zeugung der Potenzen, oder Ausziehung ihrer Wurzel das Bekannte von dem Unbekannten zu trennen sucht. Und sind es nicht in der Arithmetik schon ausgemachte Wahrheiten, daß, wenn man gleiches mit gleichem multiplicirt oder dividirt; wenn man gleiche Größen zu gleicher Dignität erhebt, oder gleiche Wurzeln aus gleichen Dignitäten zieht, allenfalls ein gleiches herauskommen muß. Indessen dürfte es für die angehenden Algebristen wohl rathsam seyn, die in besondern Gesetzen von uns angebrachten Beyspiele aus der unbestimmten und buchstäblichen Gestalt in die Zahlen zu übersetzen, um sich hierdurch von der Richtigkeit des Verfahrens desto deutlicher zu überführen. Uns aber lasset fol-

gende Zusätze hieraus bestimmen. 1) Wenn alle Größen, die in beyden Gleichungsgliedern stehn, mit eben demselben Factor multiplicirt, oder mit eben demselben Divisor dividirt sind; kann sowohl der Factor als der Divisor weggelassen werden. Wenn also in der nachstehenden Gleichung $ab^2 + bc = bd$ der Factor b allenthalben aufgehoben wird, bleibt $ab - c = d$. Imgleichen wenn in der folgenden Gleichung $\frac{a+3b}{4d} = \frac{x^3}{4d}$ der Divisor $4d$ außenbleibet, so ist $a + 3b = x^3$. 2) Wenn es Brüche in den Gleichungen giebt, so kann man ihrer ohne besonderer Mühe los werden: nur wird erfordert, daß man alle Größen der Gleichung unter gleiche Nenner bringe, und diesen alsdann durchgehends ausstreiche. Z. B. Es sey die Gleichung: $\frac{3}{4}b + \frac{1}{3}bx^2 = cd$.

Man reducire diese drey Größen zu gleichen Nennern, so wird ; $\frac{9}{12}b + \frac{4}{12}bx^2 = \frac{12}{12}cd$

das ist $9b + 4bx^2 = 12cd$.

Wir müssen noch einer andern Methode erwähnen die Brüche aufzuheben. Dieselbe besteht darinn, daß man beyde Gleichungsglieder mit dem Nenner eines jeglichen Bruches sonderlich multiplicire. Z. B. Man sollte die Brüche der obigen Gleichung $\frac{3}{4}b + \frac{1}{3}bx^2 = cd$ aufheben. Multipliciret anfänglich alle Größen der gegebnen Gleichung mit dem Nenner 4, so wird $3b + \frac{4}{3}bx^2 = 4cd$; nachher mit 3; so wird genau wie zuvor $9b + 4bx^2 = 12cd$. Der Grund dieses Verfahrens ist leichtlich einzusehen. Denn weil die Brüche nichts anders, als eine Division des Zählers durch den Nenner angeben; die durch Division verbundnen Größen aber getrennet werden, wenn man die übrigen Größen der Gleichung mit dem Divisor multiplicirt: so kann nicht gezweifelt werden, daß auch ein gleiches bey den Brüchen

chen müsse vorgenommen werden. Die Aufhebung der Brüche soll bey der Ausführung der Gleichungen allemal das erste Werk seyn. Ist man damit zu Ende gekommen, so mögen dann die übrigen Reductionsarten zu Scheidung des Bekannten und Unbekannten angewendet werden.

64. Wenn in eben derselben Gleichung mehrere Wurzelgrößen vorhanden sind, so könnte die Ausführung auf die nachstehende Weise viel geschickter unternommen werden. Z. B. Man sollte die Gleichung $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + c$ reduciren. Machet $\sqrt{ax} = p$, $\sqrt{bx} = q$; so wird $ax = p^2$ und $bx = q^2$, und die obige Gleichung $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + c$ wird also zu stehn kommen: : $p = q + c$

Quadriret die beyden Glieder: $p^2 = q^2 + 2cq + c^2$

Setzet anstatt p^2 und q^2 die obigen Werthe ax und bx: $ax = bx + 2c\sqrt{bx} + c^2$

Weil aber noch $2c\sqrt{bx}$ vorhanden, quadriret abermal die beyden Gleichungsglieder:

$$ax - bx - c^2 = 2c\sqrt{bx}$$

$$a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ac^2x + 2bc^2x + c^4 = 4c^2q^2.$$

Wenn man endlich anstatt q^2 dessen Werth bx ansetzet, so sind alle Wurzelgrößen gehoben. Diese Ausführungsmethode ist allgemein; daher sie dann bey allen Wurzelgrößen statt findet.

65. Wir haben oben bey den Gesetzen der Gleichung angemerket, daß man die Größen, welche in einem Verhältniß gegen einander stehn, keineswegs mit verschiedenen sondern vielmehr mit eben denselben Buchstaben angeben soll. Dieses nun läßt sich in unserer Aufgabe wohl anwenden. Denn ob es gleich das Ansehn hat, als wären hier drey unbekannte Größen vorhanden,

so ist doch im Grunde nur eine unbekannte daselbst. Gewiß, wenn wir das ganze Corps, so von uns x genennet worden, entwickeln, so werden sich dessen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ von selbst offenbaren.

66. Die Anfänger pflegen zu fragen, wie man die Probe anstellen soll, daß die Aufgabe richtig aufgelöset sey. Ich antworte darauf: Sind die zugemessenen Bedingnisse ordentlich erfüllet worden, so ist die Auflösung richtig; wiedrigenfalls aber muß sie für irrig gehalten werden. Nun laufen alle Bedingnisse unserer Aufgabe dahin aus, daß die gefundne Summe des gesammten Corps dem Drittheil der Getödten; dem Viertheil der Gefangenen, und dem flüchtigen Reste von 1000 Köpfen gleich sey; sie ist es aber in der That: denn 2400 ist gewißlich eine Zahl, welche der Summe ihres Drittheils $=800$, ihres Viertheils $=600$ und 1000 gleich ist.

67. Wir müssen hier einer Methode gedenken, wonach die Zwischengleichungen in einer bestimmten Aufgabe nach und nach gehoben, und bis zur endlichen Gleichung ausgeführet werden können. Dieselbe gründet sich 1) auf die Substitution der Größen; nämlich, wenn man den gefundnen Werth einer unbekannten Größe für die Größe selbst in der andern Gleichung ansetzet, und damit alle die Veränderungen vornimmt, welche der Größe, an deren Stelle sie gesetzt wird, eigen waren. Z. B. Es seyn zwo Gleichungen $x-1=y+1$, und $x+1=2y-2$. Suchet in der letzten Gleichung den Werth von x, so findet ihr $x=2y-3$. Diesen gefundnen Werth nun setzet in der ersten Gleichung anstatt x an; hierdurch wird die Gleichung $x-1=y+1$ in die nachstehende: $2y-4=y+1$ verwandelt werden, worinn nur eine unbekannte Größe, nämlich y vorhanden ist. Lasset uns drey Gleichungen geben: $x+2y=a$;

$x-$

$x - 3z = b$: $y + z = c$; Suchet den Werth des x in der zweyten Gleichung: ihr findet $x = b + 3z$. Suchet nachher den Werth von y in der dritten Gleichung: ihr findet $y = c - z$. Rücket man nun diese beyden Werthe in die erste Gleichung $x + 2y = a$ anstatt x und y ein, so bekommet man $b + 3z + 2c - 2z = a$. Wer sieht nicht, daß man hierdurch alle unbekannte Größen bis auf z ausgemustert habe? 2) **Auf die Gleichheit zwoer Größen gegen eine dritte Größe.** Nämlich, wenn man aus zwoen Gleichungen, welche verschiedene Bedingnisse der gegebnen Aufgabe enthalten, eben so viele Werthe einer unbekannten Größe entwickelt, und dieselben sofort mit einander vergleichet. Z. B. Suchet in der obigen letzten Augabe aus der ersten und zweyten Gleichung den Werth von x. Ihr findet aus der ersten Gleichung $x = a - 2y$, aus der zweyten $x = b + 3z$; so ist dann $a - 2y = b + 3z$ Suchet sodann den Werth des y, 1) aus dieser neuen Gleichung: ihr werdet finden $y = \frac{a - b - 3z}{2}$; 2) aus der dritten Gleichung; ihr findet $y = c - z$. Vergleichet sofort diese beyden Werthe mit einander: $\frac{a - b - 3z}{2} = c - z$; so bleibt nur noch eine unbekannte Größe, nämlich z über. 3) **Auf die Addition oder Subtraction zwoer Gleichungen.** Wenn nämlich die Gleichungen vermittelst der Ausführung dahin vorbereitet worden sind, daß, wenn man sie zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, allenfalls eine unbekannte Größe aufgehoben werden kann. Z. B. Es kommen zwo Gleichungen vor: $4x + 2y = a$, und $x + y = b$, und ihr wolltet die unbekannte Größe y aufgehoben wissen. Multipliciret erstens die zweyte Gleichung mit 2, so kömmt $2x + 2y = 2b$ heraus. Diese Gleichung nun subtrahiret von

der ersten $4x+2y=a$, so bekommet ihr zum Reste die nachstehende Gleichung: $2x=a-2b$, worinn sich nur eine unbekannte Größe finden läßt. Diese dritte Art die Zwischengleichungen auszuführen ist nicht allgemein.

In gewissen besondern Fällen werden auch bisweilen besondere Ausführungsmethoden gebraucht, welche viel geschickter durch Uebung und fleißige Lesung der algebrischen Bücher, als durch einige bestimmte Vorschriften erlernet werden. So viel ist gewiß, daß man auf eine der obbesagten drey Weisen alle bestimmte Aufgaben bis zu einer unbekannten Größe herunter setzen kann. Sind aber die Aufgaben unbestimmt, so dürften dadurch gewißlich die meisten unbekannten Größen ausgemustert werden.

68. Hierbey ist folgendes nachzuholen: 1) Daß im Fall die Zahl der unbekannten Größen um eines größer ist, als die Zahl der Gleichungen, in der endlichen Gleichung zwo unbekannte Größen übrigbleiben; im Fall ihre Zahl um zwey, drey ꝛc. größer ist, in der endlichen Gleichung drey, vier ꝛc. unbekannte Größen vorkommen müssen, dergestalt, daß solche auf keine Weise näher ausgeführet werden können. 2) Daß, im Fall zwo unbekannte Größen in der endlichen Gleichung ausfallen, man den Werth der einen nach Gutachten bestimmen möge: doch allemal in den Schranken, welche durch die Zwischengleichungen bestimmet worden sind: sonach aber wird sich der Werth der andern Größe von selbst entfalten lassen. 3) Daß im Fall drey, vier ꝛc. unbekannte Größen in der endlichen Gleichung übrigblieben, man nöthig haben würde, zwo, drey ꝛc. Größen nach Gutdünken zu bestimmen. Wir wollen der Sache ein Licht geben. Gesetzt, man sollte zwo Zahlen von der Eigenschaft

schaft finden, wenn man zu ihrem Product ihre Summe addirt, 34 herauskommen.

Benennung. Es sey $34=a$; die eine der unbekannten Zahlen $=x$, die andere $=y$; so ist ihr Product $=xy$, ihre Summe aber $=x+y$.

Gleichung: $xy+x+y=a$
Ausführung: $-y-y$

$$xy+x=a-y$$
$$:y+1 \quad :y+1$$
$$x=\frac{a-y}{y+1}$$

Weil nun diese endliche Gleichung nicht mag dahin gebracht werden, daß nur eine unbekannte Größe übrigbleibe, darum lasset uns für y eine gewisse Zahl nach Gutachten nehmen, doch mit der Behutsamkeit, daß sie kleiner als a sey, wiedrigenfalls würde x verneinend ausfallen, welches nach den Bedingnissen der Aufgabe keineswegs seyn kann. Gesetzt nun, es sey $y=4$, so ist $x=\frac{a-y}{y+1}=\frac{34-4}{4+1}=\frac{30}{5}=6$. Hätte man $y=6$, oder $=9$ genommen, so würde im ersten Fall $x=4$, im zweyten Fall aber $=2\frac{1}{2}$ geworden seyn.

Unter die bestimmte Aufgaben ist billig jene Rechnungsart zu zählen, welche bey den Arithmetikern die Vermischungsregel (regula alligationis) genennt wird, und deren Gebrauch so oft vorkommet, als oft man aus den gegebnen Verhältnissen einzelner Materien finden will, wie viel von jeder zu einer gegebnen vermischten Menge genommen werden soll. Und obschon Aufgaben von dieser Gattung nach der allgemeinen Analysis aufgelöset

löset werden mögen, so giebt es doch auch hierinn gewisse Practik, welche wir durch Beyspiele lehren wollen.

Erste Aufgabe. Man hat drey Sorten Schießpulver, *A*, *B*, *C*; das Pfund von *A* kömmt auf 28 sgl. das Pfund von *B* auf 18 sgl. das Pfund von *C* auf 8 sgl. zu stehn. Davon soll ein viertes Pfund gemenget werden, dessen Preiß auf 20 sgl. angesetzet worden. Man fragt nun, wie viel dazu von jeder Sorte zu nehmen sey.

Benennung. Es sey die von *A* zu nehmende Quantität $= r$, die von $B = x$, die von $C = y$.

Gleichung: $28r + 18x + 8y = 20$

Ausführung: $-20 \quad -20 \quad -20 \quad -20$ Subtrahiret das bekannte Gleichungsglied 20 von allen Größen der Gleichung.

$$8r - 2x - 12y = 0$$

$$8r = 2x + 12y$$

$$14 \quad 8 \quad 8$$

$$\frac{14}{30}r + \frac{8}{30}x + \frac{8}{30}y = 20.$$

Traget die Summe der Coefficienten wechselweise aus einem Gleichungsgliede in das andere über, und setzet sie an die Stelle der vorigen Coefficienten an. Dividiret eine jede Größe mit der Summe aller Coefficienten überhaupt; stellet alle unbekannte Größen abermal in ein Glied, aber unter wirklichen Zeichen, zurück, und machet sie dem bekannten und ehedem aufgehobenen Gliede 20 gleich.

Sonach ist $r = \frac{14}{30}$ Pfund; $x = \frac{8}{30}$ Pfund; $y = \frac{8}{30}$ Pfund.

Zweyte Aufgabe. Man hat Wein, wovon das Quart auf 16 Gr. zu stehn kömmt. Wie viel Wasser

müßte

müßte man nehmen, um daraus ein Quart gemischten Weins für 10 sgl. zu machen?

Benennung: Es heiße die zu nehmende Quantität Weins x, die Quantität des Wassers y.

Gleichung: $16x + 0y^{*} = 10$ * Denn Wasser kostet 0 oder nichts.

Ausführung: $-10 \quad -10 \quad -10$

$$6x - 10y = 0$$
$$6x = 10y$$
$$10 \qquad 6$$

$$\frac{10x}{16} + \frac{6}{16}y = 10.$$ Demnach sollen vom Weine $\frac{10}{16}$, vom Wasser aber $\frac{6}{16}$ eines Quarts genommen werden.

69. Z. B. Die II. Gleichung: $x^2 + bx + x + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 - a^2 d^2 + \frac{1}{4} = 0$, deren wir in der Tabelle erwähnt haben, ist in der That mit einem vollständigen Quadrat versehen. Denn man findet darinn das Quadrat aus der halben Summe der Coefficienten $+b$ und $+1$; das ist, das Quadrat aus $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}$. Will man nun $-a^2 d^2$ in das andere Gleichungsglied übertragen, so wird die nachstehende Gleichung: $x^2 + bx + x + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4} = a^2 d^2$ herauskommen; worinn das vördere Glied ein reines und vollständiges Quadrat in sich enthält, dessen Wurzel $= x + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$.

Aber die I. Gleichung $5ax^2 + bx^2 - ab^2 + bx - cx = 0$ fasset nur ein unvollständiges Quadrat, zu dessen Vollkommenheit noch das Quadrat aus der halben Summe der Coefficienten $+ \frac{b}{5a+b}$ und $- \frac{c}{5a+b}$, das ist, das Quadrat aus $\frac{b-c}{10a+2b}$ abgänglich ist.

70 Z. B.

70 z. B. Man sollte die nachstehende Gleichung vollends ausführen: $x^2 + \frac{1}{4}b^2 + x + \frac{1}{2}b = a^2 d^2 - \frac{1}{4} - bx$

Machet die Gleichung $= 0$; $x^2 + bx + x + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 - a^2 d^2 + \frac{1}{4} = 0$

Theilet die Classen ein:

$$\begin{array}{llll} x^2 & + bx & + \frac{1}{4}b^2 & = 0 \\ & + x & + \frac{1}{2}b & \\ & & + \frac{1}{4} & \\ & & + a^2 d^2 & \end{array}$$

Behaltet das Quadrat der bekannten Größen $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}$ in dem vördern Gleichungsgliede, und traget $a^2 d^2$ in das hintere Glied über: $x^2 + bx + x + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4} = a^2 d^2$

Ziehet die Wurzel aus: $x + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} = \sqrt{a^2 d^2}$

Machet x von allen bekannten vollends los: $x = \sqrt{a^2 d^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$

71. Ein Quadrat kann unvollständig seyn, entweder, weil es ihm an dem Quadrat des zweyten binomischen Wurzeltheils gebricht, oder weil das Quadrat dieses zweyten Theils eine negative Größe ist, z. B. $x^2 + 2bx - b^2$. Dieser letztere Fall bezieht sich dahin, weil ein verneinendes Quadrat für ein bloß chimärisch Wesen in der Algebre geachtet wird. Will man nun das Quadrat in dem ersten Fall ergänzen, so muß damit auf die folgende Weise verfahren werden. Gesetzt man sollte die nachstehende Gleichung $x^2 + 2bx - 3a^2 = 0$ ausführen. 1) Man trägt die bekannte Größe (hier $3a^2$) in das andere Gleichungsglied über: $x^2 + 2bx = 3a^2$. 2) Zieht aus dem Quadrat des ersten binomischen Wurzeltheils (hier aus x^2) die Wurzel x. 3) Nimmt solche zweymal (hier $2x$) und dividirt damit die in der zweyten Classe befindlichen Größen (hier $2bx$); der Quotient b ist die Wurzel vom Quadrat des zweyten binomischen Wurzeltheils. 4) Man addirt dieses Quadrat (hier b^2) zu beyden Gleichungsgliedern; hierdurch gewinnt man eine

eine Gleichung: $x^2+2bx+b^2=3a^2+b^2$, in deren vördern Gliede sich ein reines und vollständiges Quadrat finden läßt, dessen Wurzel $x+b$ ist.

Nichts ist gewisser, als die Richtigkeit dieses Verfahrens. Denn weil man alle Quadrate ansehn kann als wären sie von einer binomischen Wurzel gezeuget worden; die Quadrate aber, so von einer binomischen Wurzel gezeuget sind, aus 3 Theilen bestehen, nämlich 1) aus dem Quadrat des ersten Wurzeltheils; 2) aus dem doppelten Producte eines Wurzeltheils in den andern; und 3) aus dem Quadrat des zweyten Wurzeltheils (S. die 25 Anmerk.); so kann nicht gezweifelt werden, daß derjenige Quotient, welcher herauskömmt, wenn man das Product mit der doppelt genommenen Wurzel des ersten quadrirten Theils dividirt, die ächte Wurzel des Quadrats des zweyten binomischen Wurzeltheils sey. Lasset uns solches mit einem Beyspiel erläutern.

Gesetzt man wollte die nachstehende Gleichung ausgeführet wissen: $5ax^2+bx^2-ab^2=cx-bx$

Machet die Gleichung $=0$; $5ax^2+bx^2-ab^2+bx-cx=0$

Dividiret mit $5a+b$; $x^2+\frac{bx}{5a+b}-\frac{cx}{5a+b}-\frac{ab^2}{5a+b}=0$

Theilet die Classen ein: $x^2+\frac{bx}{5a+b}-\frac{ab^2}{5a+b}=0$

$$-\frac{cx}{5a+b}$$

Traget $\frac{ab^2}{5a+b}$ hinüber: $x^2+\frac{bx-cx}{5a+b}=\frac{ab^2}{5a+b}$

Er-

Ergänzet das Quadrat mit dem Quadrat aus der Hälfte der Coefficienten $\frac{b-c}{5a+b}$, das ist mit $\left(\frac{b-c}{10a+2b}\right)^2$; $\frac{x^2+bx-cx}{5a+b}$

$$+\left(\frac{c-c}{10a+2b}\right)^2=\frac{ab^2}{5a+b}+\left(\frac{b-c}{10a+2b}\right)^2$$

Ziehet die Wurzel aus:

$$x+\frac{b-c}{10a+2b}=\sqrt{\left(\frac{ab^2}{5a+b}+\left(\frac{b-c}{10a+2b}\right)^2\right)}$$

Führet die Gleichung vollends aus:

$$x=\sqrt{\left(\frac{ab^2}{5a+b}+\left(\frac{b-c}{10a+b}\right)^2\right)}-\frac{b+c}{10a+2b}$$

In dem zweyten Fall, wenn nämlich das Quadrat des zweyten binomischen Wurzeltheils negativ ist, läßt sich die Ergänzung auf eine sehr leichte Weise verrichten: nur hat man nöthig zu beyden Gleichungsgliedern dasjenige zu addiren, was die Verneinung aufheben, und das negative Quadrat aus der halben Summe der Coefficienten der zweyten Classe wirklich machen kann.

Z. B. Man sollte die nachstehende Gleichung ausführen: : : $x^2-ax-\frac{1}{4}a^2-bd=0$

Traget $-bd$ hinüber: $x^2-ax-\frac{1}{4}a^2 = bd$

Addiret zu beyden Gleichungsgliedern $\frac{2}{4}a^2$; $x^2-ax-\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{4}a^2=bd+\frac{2}{4}a^2$

Reduciret die Gleichung $x^2-ax+\frac{1}{4}a^2 = bd + \frac{1}{2}a^2$

Zieht die Wurzel aus: $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

Hier äußert sich nun ein Umstand, welcher den angehenden Algebristen einen Zweifel bringen kann. Sie nehmen Anstand, ob die Wurzel des Quadrats

x^2-

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ mit $x - \frac{1}{2}a$, oder mit $\frac{1}{2}a - x$ angegeben werden solle. Dieses ist unläugbar, daß in einem binomischen Quadrat, worinn die mittlere Größe verneinend ist, der eine Wurzeltheil gleichfalls verneinend seyn müsse: denn weil diese mittlere Größe nichts anders, als ein doppeltes Productt des einen Wurzeltheils in den andern in sich begreift, so muß nothwendig einer derselben negativ seyn; wiedrigenfalls müßte man zugeben, daß zwo wirkliche Größen ein negatives Product zeugen können, welches wiedersprechend ist. Diesen Zweifel also zu heben, muß man annehmen, daß in dergleichen Fällen allemal eine zweyfache Wurzel vorhanden sey. Denn man mag in der obigen Aufgabe $x - \frac{1}{2}a$, oder $\frac{1}{2}a - x$ für die Wurzel ansehn, so wird allenfalls dasselbe Quadrat $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ herauskommen. Aber welche von beyden Wurzeln soll der andern vorgezogen werden? dieses kann lediglich aus den Bedingnissen der Aufgabe und ihrem Ausdrucke sowohl in der ersten als in den mittlern Gleichungen bestimmet werden. Hat man mit Ziffern zu thun, so ists allerdings vonnöthen, daß man diejenige Wurzel annehme, wodurch der Werth der unbekanneen Größe durch etwas wirkliches bestimmet werden kann.

72. Bey dem Beschluß dieses Aufsatzes finden wir uns noch verbunden, zwo Fragen zu beantworten. 1) Wie kann man eine Aufgabe, welche in lauter bestimmte Umstände und Bedingnisse eingekleidet ist, allgemein geben? Antw. Wenn man die besondern Bedingnisse allgemein ausdrückt, und die Ziffern in Buchstaben verwandelt. Z. B. die nachstehende Aufgabe: Von einem feindlichen Corps sind nicht mehr dann 1000 Mann übergeblieben. $\frac{1}{3}$ Desselben wurde in die Pfanne gehauen; $\frac{1}{4}$ zu Kriegsgefangenen gemacht.

macht. Man fragt, wie stark das Corps, wie zahlreich die Getödten, und wie viel der Gefangenen gewesen, ist allerseits in besondere und bestimmte Umstände eingeschränkt; wollte man aber sagen: Es denkt jemand eine gewisse Menge feindlicher Soldaten; diese Menge ist gleich zween Theilen des Heers, und überdies noch einer bestimmten und gegebnen Zahl. Es fragt sich, wie man allenfalls diese eingebildte Menge der Soldaten finden könne, so wäre die Aufgabe schon allgemein; und im Fall man das Heer x, die Theile desselben $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{d}$, die gegebne Zahl e nennte, würde diese allgemeine Aufgabe also ausgeführt werden können.

$$x = \frac{a}{b}x + \frac{a}{d}x + e$$

$$bdx = abx + adx + bde$$

$$bdx - abx - adx = bde$$

$$x = \frac{bde}{bd - ab - ad}$$

Hieraus aber erhellet ganz deutlich, daß sich im Gegentheil die allgemeine Auflösung der Aufgabe leichtlich an einen besondern und bestimmten Fall anwenden läßt: nur hat man nöthig die Ziffern an die Stelle der Buchstaben anzusetzen. Diesemnach wenn man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{1}{3}$, $\frac{a}{d}$ mit $\frac{1}{4}$, e mit 1000 bestimmte, würde $bde = 12000$, $bd - ab - ad = 12 - 3 - 4 = 5$, und $x = \frac{bde}{bd-ab-ad} = \frac{12000}{5} = 2400$ werden.

2) Welche Vorzüge haben die allgemeinen Auflösungen vor denjenigen, die mit Ziffern verrich-

richtet werden? Antw. Die allgemeine Auflösung wirft allemal eine gewisse allgemeine Formel oder Regel aus, nach welcher man in unendlich vielen ähnlichen Fällen die Auflösungen bilden kann; da hingegen die Auflösungen mit Ziffern nur einen bestimmten Fall zu entwickeln vermögend sind. Aus der endlichen Gleichung $x = \frac{bde}{bd - ab - ad}$ der oben aufgelösten Aufgabe dürfte nachstehende Regel gezogen werden: Die wahre Menge des Heers dürfte gefunden werden, wenn man 1) diejenige Zahl, welche mit den übrigen zween Theilen dem ganzen Heere gleich ist, mit dem Producte der beyden Bruchnenner dieser Theile multiplicirt (bde), und 2) dieses Product mit der Differenz dividirt, welche herauskömmt, wenn man von dem Producte der beyden Nenner (bd) die sonderlichen Producte jedes Bruchzählers in den Nenner des andern Bruches (ab und ad) subtrahirt. Der Quotient giebt die wahre Menge des Heers an.

Nachtrag

von verschiedenen algebrischen Aufgaben.

Diese Aufgaben sind für die angehenden Algebristen zur Uebung bestimmt. Denselben zu gefallen, werden hier zugleich die Hauptgleichungen und die Werthe der unbekannten Größen mit angezeiget.

A. Aufgaben, worinn bloß einfache Gleichungen vorhanden sind.

a) Bestimmte Aufgaben.

I. Wie alt bist du? fragte man einen Greis; mein Alter, wiedersetzte dieser, das Alter meiner Gemahlinn, und das Alter x meines Sohnes, machen zusammen 100 Jahre aus. Ich bin 5 Jahr älter als meine Gemahlinn, und diese 46 Jahr älter als der Sohn. Es fragt sich, wie alt eine jede dieser drey Personen gewesen. Gleichung $x + x + 46 + x + 46 + 5 = 100$. Daher $x = 1$.

II. Tartulph machte ein Testament und starb. Das Waysenhaus erbte die Hälfte seines Vermögens x; seine Freunde ein Drittheil, und es blieben noch für das Begräbniß 100 Thlr übrig. Nun fragt man, wie groß sein Vermögen gewesen. Gleich. $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 100$. Daher $x = 600$.

III. Ein Bothe legt täglich 8 Meilen hinter sich. Diesem nun folget auf den vierten Tag ein anderer Bothe, mit dem Vorsatze, jenen nach Verlauf 16 Tagen einzuholen. Es wird die Zahl der Meilen x verlangt, welche der letztere Bothe, um sein Vorhaben zu erfüllen, täglich laufen muß. Gleich. $8 \times 4 + 16 \times 8 = 16x$. Daher $x = 10$.

IV. Et-

IV. Etliche Bettler x sprachen mich einst um ein Almosen an. Ich wollte einem jeden 4 Gr. geben, aber dazu mangelten mir noch 6 Gr. So gab ich dann einem jeden 2 Gr. und es blieben mir noch 2 Gr. über. Man fragt, wie viel der Bettler gewesen. Gleich. $4x - 6 = 2x + 2$. Daher $x = 4$.

V. Ein Goldschmied soll aus 30 Loth Silber folgende drey Stücke verfertigen: Einen Eßlöffel x, einen Becher und eine Schale. Der Becher soll dreymal schwerer als der Löffel, die Schale aber noch einmal so schwer als der Becher seyn. Wie schwer muß wohl ein jedes Stück seyn? Gleich. $x + 3x + 6x = 30$. Dah. $x = 3$.

VI. 200 Thlr. Schulden sollen zu vier Terminen abgetragen werden. Zum zweyten Termin soll dreymal so viel als zum ersten x; zum dritten Termin dreymal so viel als zum zweyten, zum letzten Termin dreymal so viel als zum dritten gezahlt werden. Man fragt, wie viel zu jedem Termin gezahlt werden soll. Gleichung. $x + 3x + 9x\ 27x = 200$. Daher. $x = 5$.

VII. Ein Kaufmann handelt eine Quantität des feinsten Saffrans für 720 Thlr. ein. Würde diese Quantität um 12 Pfund schwerer gewesen seyn, so wäre davon 1 Pfund auf 10 Thlr. zu stehn gekommen. Man fragt, wie viel Pfund Saffran gewesen, und was 1 Pfund gekostet hat. Gleich. $10x + 120 = 720$. Dah. $x = 60$.

VIII. Die Glocke hat x geschlagen, rief ein Nachtwächter aus, und schwieg nachher stille. Wie? fragte ihn ein Schwärmer, wie viel hats geschlagen? jener sagte: die Hälfte, das Drittheil und das Viertheil der Stunden ist um 1 größer als ihre Zahl, rathet nun, mein Herr, wie viel es geschlagen hat. Gleich. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$. Daher $x = 12$.

IX. Dreyen Personen A, B, C wird eine Quantität x von Aprikosen dargeboten, mit Vermelden, daß sie

sich darein nach Belieben theilen wollten. *A* macht den Anfang, nimmt davon die Hälfte weniger 12. *B* folgte nach, nahm die Hälfte des Restes weniger 10. *C* nahm die Hälfte der übriggebliebenen, stellte aber davon 4 Stücke zurück. Als man nachher den letzten Rest gezehlet hat, fand sich, daß noch genau die Hälfte der anfänglich dargebotnen Aprikosen übriggeblieben sey. Es fragt sich nun, wie viel der Aprikosen gewesen, und wie viel ein jeder davon genommen. Gleich. $\frac{1}{8}x + 12 = \frac{1}{2}x$. Daher $x = 32$.

X. Phrix hat ein Vermögen; man schätzt es auf 20000 Thlr. Nein, spricht er, mein Vermögen x ist geringer: wenn solches dreymal größer wäre, so hätte ich fünfmal so viel über 20000 Thlr. als ich itzt darunter habe. Wie groß war wohl das Vermögen? Gleich. $3x = 20000 + 100000 - 5x$ Daher. $x = 15000$.

XI. Wie viel Ochsen treibest du? fragte jemand einen Viehhändler. Freund wiedersetzte dieser, wenn ich der Ochsen noch sechsmal so viel hätte, überdies wir beyde Ochsen wären, so würde die Heerde genau 100 Stück Ochsen in sich enthalten. Rathet nun, wie viel ich treibe. Gleich. $x + 6x + 2 = 100$. Daher. $x = 14$.

XII. Titus besitzet eine Mühle von drey Gängen *A*, *B*, *C*. Mit dem Gange *A* mahlt er 4 Scheffel in 3 Stunden; mit dem Gange *B* 8 Scheffel in 5 Stunden. Mit dem Gange *C* 9 Scheffel in 6 Stunden. Nun soll er mit allen drey Gängen zusammen $66\frac{1}{2}$ Scheffel mahlen. Es fragt sich, wie viel Stunden x dazu vonnöthen sind. Gleich. $4x + \frac{13}{30}x = 66\frac{1}{2}$. Daher $x = 15$.

XIII. Ein Officier stattet seinem Obersten nachstehenden Rapport ab. Herr! die Hälfte meines Commando x ist gefangen; der vierte Theil getödtet, und der siebente Theil hinweggelaufen; nun sind noch 3 Mann übrig.

übrig. Frage: wie zahlreich war wohl sein Commando? Gleich. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$. Daher $x = 28$.

XIV. Ein gewisser Informateur hatte 4 Scholaren eine Zeitlang x zu unterrichten. Der eine zahlte wochentlich 12 Gr. der andere 8 Gr. der dritte 6 Gr. der vierte 4 Gr. Nach geendigten Collegien fand er, daß ihm 30 Thlr. von allen vieren gereicht worden sind. Nun fragt man, wie viel Wochen die Collegia gehalten worden. Gleich. $12x + 8x + 6x + 4x = 30$ Daher $x = 24$.

XV. In einer gewissen Stadt findet sich eine Fontaine, worauf ein Löw mit folgender Inschrift vorgestellet wird:

Ich bin aus Aerz gemacht,
Daß ich dem Wasser muß
Hier lassen seinen Fluß
Aus meiner Glieder Pracht.
Wenn von sich nur allein
Mein weiter Rachen speyt,
Kann in sechs Stunden Zeit
Der Brunn voll Wasser seyn.
Zwey Tage darfs genau,
Wenn mein recht Auge rinnt:
Zum linken dreye sind; *
Und wenn die rechte Klau
Ausfließt vier Tage, füllt
Sie diesen Brunnen voll.
Fragt sich, was Zeit sein soll,
Wenn alles vieres quillt.

* Das ist, zum linken Auge sind 3 Tage erforderlich.

Nennt man die Zeit x, so ist: $\frac{x}{6} + \frac{x}{48} + \frac{x}{72} + \frac{x}{96} = 1$. Daher $x = 4\frac{44}{61}$ Stund.

XVI. Ein Vater hatte für seine Söhne folgendes Testament aufsetzen lassen: Der älteste Sohn soll 1000 Thlr., und von der noch übrigen Masse ein Sechstheil bekommen. Der Unterälteste Sohn soll 2000 Thlr. und

ein Sechstheil der übrigen Masse haben. Dem dritten Sohne sollen 3000 Thlr., nebst einem Sechstheile der noch übrigen Masse zukommen; und sofort sollen den übrigen Söhnen je so viele Tausende nebst einem Sechstheile der übrigen Masse gereicht werden, als die Zahlen in der Reihe ihrer natürlichen Succeßion vorkommen. Aber dem jüngsten Sohne soll derjenige Rest, welcher übrigbleibt, nachdem die ältern Brüder das Ihrige herausgenommen haben, anheim fallen. Die Erbschaft ward darnach vertheilt, und man hat wahrgenommen, daß alle Söhne in gleiche Portionen succediret sind. Nun fragt es sich: 1) Wie viel der Söhne gewesen. 2) Wie viel ein jeder geerbet. 3) Wie hoch sich die Summe der sämmtlichen Erbschaft x belaufen habe. Gleich. $\frac{5000+x}{6}=\frac{55000+5x}{36}$. Daher $x=25000$.

XVII. Ein Mann gab auf die Frage, wie alt seine Kinder wären, folgende Antwort: mein jüngster Sohn ist 4 Jahr älter als meine jüngste Tochter; mein ältester Sohn aber 4 Jahr älter als beyde zusammen. Meine älteste Tochter ist halb so alt als die vorigen drey zusammen: ich aber neunzigjähriger Greis zähle so viel Jahre, als diese meine 4 Kinder zusammen. Man verlangt das Alter eines jeden Kindes zu wissen. Es sey das Alter der jüngsten Tochter x. Gleich. $6x+18=90$. Daher $x=12$.

Anmerkung. In nachstehenden Aufgaben sollen bloß die Gleichungen angezeiget werden.

XVIII. Der Bettler A beklagt sich bey dem Bettler B, daß er den ganzen Tag hindurch nur einige wenige Kreuzer x gesammelt hätte. Warum klagst du? wiedersetzte dieser; du hast ja allenfalls mehr als ich davon getragen. Denn gäbe ich dir von meinem Almosen x noch einen Kreuzer, so hättest du fürwahr noch einmal

so

so viel als ich; gäbest aber du mir von deinem Almosen y einen Kreuzer, so würde einer so viel als der andere haben.

Gleich. $\begin{cases} 2x - 2 = y + 1 \\ x + 1 = y - 1. \end{cases}$

XIX. Ein Eymer Franzwein kostet 12 Thlr., ein Eymer Grünberger Wein 7 Thlr. Aus beyden Sorten will jemand 100 Eymer gewissenhaft zusammen mischen, dergestalt, daß ein Eymer von diesem Mischmasche auf 9 Thaler zu stehen komme. Er steht nun an, wie viel Eymer x von dem Franzweine, und wie viel Eymer y von dem Grünberger Weine zu nehmen sind.

Gleich. $\begin{cases} x + y = 100 \\ 12x + 7y = 900. \end{cases}$

XX. Wie alt waren wohl Pyramus und Thysbe? Wollte man von dem Alter x des Pyramus zu dem Alter y der Thysbe 5 Jahre hinzusetzen, so würden beyde gleich alt gewesen seyn. Wollte man aber von der Thysbe ihrem Alter 5 Jahre zu jenem des Pyramus zulegen, so würde dieser dreymal älter als jene gewesen seyn.

Gleich. $\begin{cases} x + 5 = y - 5 \\ y + 5 = 3x - 15. \end{cases}$

XXI. Herr! fragte jemand, welchen Lohn geben sie ihrem Gesinde? Ich, sagte jener, habe einen Diener und eine Magd. Jener bekömmt jährlich 16 Thlr. mehr dann diese. Wenn ich des Dieners Lohn x mit jenem der Magd y dividire, kommen 3 zum Quotienten heraus.

Gleich. $\begin{cases} x - y = 16 \\ x : y = 3. \end{cases}$

XXII. Zween Gesellen A und B kehren aus einer Spielgesellschaft zurück. Wie viel habt ihr verlohren? fraget B; wenn ich noch einen Thaler im Spiele gelassen hätte, antwortet A, würde mein Verlust x zweymal so groß als euer Gewinnst y gewesen seyn. Hätte ich

aber 1 Thaler weniger gelassen, so hätte ich genau so viel verloren, als ihr gewonnen habt.

Gleich. $\begin{cases} x+1=2y \\ x-1=y. \end{cases}$

XXIII. Ein Herr geht mit seinem Diener folgende Bedingnisse ein: Pursche! wofern du dich nicht berauschest, sollst du täglich 2 Gr. zu gewarten haben; wiedrigenfalls wird man dir für jeden Rausch 3 Gr. vom Lohne abziehn. Nach Verlauf 40 Tagen, als sie mit einander rechnen wollten, fand sich, daß einer an den andern nichts mit Rechte zu fordern hatte. Man fragt nun, wie viel Tage x der Pursche berauschet, und wie viel Tage y nüchtern während der Zeit gewesen sey.

Gleich. $\begin{cases} x+y=40 \\ 3x=2y. \end{cases}$

XXIV. Was kostet wohl ein Pfund Lachs? fragte eine Frau. Madame, wiedersetzte die Magd, ich komme sogleich vom Markte; daselbst sah ich, daß man vier Pfund frischen und 3 Pfund gesalzenen Lachs für $2\frac{1}{2}$ Thlr. imgleichen 2 Pfund frischen und 1 Pfund gesalzenen für 1 Thlr. gekauft habe. Es fragt sich nun, wie hoch das Pfund x von frischen, und das Pfund y von gesalzenen Lachs gekommen.

Gleich. $\begin{cases} 4x+3y=60 \text{ Gr.} \\ 2x+y=24. \end{cases}$

XXV. Man hatte 3 Pferde eingehandelt. Der Preiß x des ersten Pferdes machte mit dem halben Preiße der übrigen zweyen 25 Ducaten aus. Der Preyß y des zweyten machte mit $\frac{1}{3}$ Preißes der übrigen zweyen 26 Ducaten aus. Endlich der Preiß z des dritten Pferdes machte mit dem halben Preiße der übrigen zweyen 29 Ducaten aus. Man verlangt den Preiß eines jeden Pferdes.

Gleich.

Gleich. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 25 \\ y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 26 \\ z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 29. \end{cases}$

XXVI. Drey Bombardiers *A, B, C* warfen in eine belagerte Stadt eine gewisse Anzahl Bomben; nämlich *A* und *B* zusammen warfen 20 Bomben mehr, dann *C*; *B* und *C* zusammen 32 Bomben mehr dann *A*; endlich *A* und *C* zusammen 28 Bomben mehr dann *B*. Nun fragt man nach der Zahl x der von *A*, nach der Zahl y der von *B*, und nach der Zahl z der von *C* geworfenen Bomben.

Gleich. $\begin{cases} x + y = z + 20 \\ y + z = x + 32 \\ x + z = y + 28. \end{cases}$

XXVII. Ein Banquier hatte drey Säcke mit Geld auf dem Zähltische liegen. In dem einen Sack waren lauter Zweygroschenstücke x, in dem zweyten lauter Viergroschenstücke y, in dem dritten lauter Achtgroschen-Stücke z. Wenn man die Zwey- und Achtgroschenstücke zusammen addirt, so sind es 30 Thaler; addirt man aber die Zwey- und Viergroschenstücke zu einander, so bekömmt man 26 Thaler; wenn man endlich die Vier- und Achtgroschenstücke addirt, kommen 24 Thaler heraus. Man fragt, wie viel Thaler von jeder Münzsorte vorhanden gewesen.

Gleich. $\begin{cases} x + z = 30 \\ x + y = 26 \\ y + z = 24. \end{cases}$

XXVIII. Von vier Cavallerieregimentern *A, B, C, D* wird ein Commando ausgeschickt. Die Summe der Pferde von den Regimentern *A, B, D* war um 620 größer dann die Zahl z der Pferde von dem Regiment *C*. Die Summe der Pferde von den Regimentern *A, B, C*

um 460 größer, dann die Zahl z vom Regiment D. Die Summe der Pferde von den Regimentern B, C, D um 380 größer dann die Zahl x vom Regiment A. Endlich die Summe von den Regimentern A, C, D um 500 größer, dann die Zahl u vom Regiment B. Nun fragt sichs, wie viel Pferde hierzu von jedem Regiment abgegeben worden.

$$\text{Gleich.}\begin{cases} u+x+y=z+620 \\ u+x+z=y+460 \\ u+y+z=x+380 \\ x+y+z=u+500. \end{cases}$$

XXIX. Was führet ihr zu Markte? wurde ein Landweib gefragt. Herr! antwortete sie, Gänse, Hühner, Enten und Tauben. Wenn ich zu der Zahl u meiner Gänse noch $\frac{1}{4}$ meines übrigen Kaufviehes hinzusetzte, würde ich der Gänse halb Schock weniger 3 haben. Und wär die Zahl x meiner Enten noch halb so groß, als mein übriges Kaufvieh, so hätte ich der Enten 3 Mandel und 1. Wenn ich aber zu der Zahl y meiner Hühner noch $\frac{3}{4}$ meines Viehes hinzufügte; würde ich der Hühner 1 Schock und 9 haben. Wenn ich endlich von der Zahl z meiner Tauben die Hälfte des übrigen Viehes subtrahirte, würden 12 Tauben übrigbleiben. Rathet nun, mein Herr, wie viel ich von jeder Gattung zu Markte führe.

$$\text{Gleich.}\begin{cases} u+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z=27 \\ x+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=46 \\ y+\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}z=69 \\ z-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=12. \end{cases}$$

XXX. Fünf Gläubiger A, B, C, D, E büßen bey einem verunglückten Schuldner ihr Darlehn, r, u, x, y, z ein. Hätte E noch einmal, D noch zweymal, C noch viermal, B noch sechsmal, A noch zehnmal so viel eingebüßet, würde ein jeder je 50 Thaler mehr als die übrigen

viere insgesammt verloren haben. Es wird der Verlust eines jeden Gläubigers insonderheit verlangt.

Gleich. $\begin{cases} r+u+x+y+50=2z \\ r+u+x+z+50=3y \\ r+u+y+z+50=5x \\ r+x+y+z+50=7u \\ u+x+y+z+50=11r. \end{cases}$

b) Unbestimmte Aufgaben.

XXXI. Man soll zwo Zahlen x und y ausfindig machen: die, wenn man sie multiplicirt, und von dem Producte ihre Summe subtrahirt, 24 geben. Gleich. $xy-x-y=24$.

XXXII. Man soll eine Zahl x finden, welche, wenn man sie mit 9 oder 4 dividirt, je ein vollkommenes Quadrat y^2 oder z^2 gebe.

Gleich. $\begin{cases} x:9=y^2 \\ x:4=z^2. \end{cases}$

XXXIII. Ein Apotheker besitzet drey verschiedene Gattungen eines Spiritus. Das Lot von der ersten Gattung kostet 4 Thlr., von der zweyten Gattung 6 Thlr., von der dritten Gattung 9 Thlr. Aus diesen drey Gattungen sollen 20 Lot eines vermischten Spiritus gemacht werden, wovon das Lot auf 7 Thaler zu stehn kommet. Wie viel wird nun von jeder Gattung r, q und p zu nehmen seyn.

Gleich. $\begin{cases} r+q+p=20 \\ 4r+6q+9p=140. \end{cases}$

XXXIV. Man will 13 Ellen theils feiner x, theils mittler y, theils grober Leinwand für 66 sgr. einhandeln. Die Elle von der feinen kostet 8 sgr., von der mittlern 5 sgr., von der groben 3 sgr. Wie viel wird man von jeder Sorte bekommen können?

Gleich.

Gleich. $\begin{cases} x + y + z = 13 \\ 8x + 5y + 3z = 66. \end{cases}$

XXXV. Einem gewissen Hospital, welches 50 Personen ernährte, ward ein Legat von 240 Thlr. mit diesem Bedingnisse vermacht, daß davon den Mannspersonen zu 8 Thlr., den Weibspersonen zu 6 Thlr., den Kindern ohne Unterschied zu 2 Thlr. gereicht werden sollte. Nun fragt sichs, wie groß die Zahl der Männer, Frauen und Kinder gewesen.

Gleich. $\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 8x + 6y + 2z = 240. \end{cases}$

XXXVI. Ein gewisser Weinfabrikant hat den Beruf ungarische Weine zu machen; wozu er sich des Bittersects, des Franzweins und des Madera bedienet. Der Eymer von der letzten Sorte dieser Materie kostet 38 Thlr., von der mittlern Sorte 31 Thlr., von der ersten Sorte 25 Thlr. Daraus nun ist er entschlossen 350 Eymer ungarischen Weins zu bilden, dergestalt, daß der Eymer genau auf 32 Thlr. zu stehn komme. Er fragt, wie viel von der ersten Sorte x, von der zweyten y und von der dritten z zu nehmen sey.

Gleich. $\begin{cases} x + y + z = 350 \\ 25x + 31y + 38z = 11200. \end{cases}$

XXXVII. Ein Kaufmann hat vier Sorten von Cacao, *A*, *B*, *C*, *D* in Provision. Das Pfund von *A* kömmt auf 7 Gr., das Pfund von *B* auf 11 Gr., das Pfund von *C* auf 20 Gr., und das Pfund von *D* auf 30 Gr. zu stehn. Er will nun aus diesen vier Sorten ein Gemengsel von 350 Pfunden machen, wovon das Pfund 18 Gr. gelten soll. Wie viel wird wohl von der ersten Sorte r, von der zweyten x, von der dritten y, und von der vierten z zu nehmen seyn?

Gleich

Gleich. $\begin{cases} r + x + y + z = 350 \\ 7r + 11x + 20y + 30z = 350 \times 18. \end{cases}$

Anmerk. Diese Aufgabe verdient einige Aufmerksamkeit. Denn wenn man die Werthe der darinn begriffenen unbekannten Größen gesetzmäßig bestimmen wollte, würde r 181, x 220, y 209 verschiedene Werthe annehmen, und sonach die Aufgabe auf 610 verschiedene Weisen aufgelöst werden können.

XXXVIII. Ein Fleischer handelt 100 Stück Vieh für 200 Thlr. ein. Hierunter waren Ochsen, Kühe, Kälber und Schafe. Den Ochsen bezahlte er mit 20 Thlr., die Kuhe mit 10 Thlr., das Kalb mit 4 Thlr. und das Schaf mit 1 Thlr. Frage: wie viel hat er wohl von jeder Sort r, x, y, z eingehandelt?

Gleich. $\begin{cases} r + x + y + z = 100 \\ 20r + 10x + 4y + z = 200. \end{cases}$

XXXIX. Ein Herr gab seinem Bedienten 6 Thlr. um solche in einen Bettlerhaufen dergestalt zu vertheilen, daß davon den Mannspersonen zu 15 Kr., den Weibspersonen zu 12 Kr., den Kindern schlechterdings zu 10 Kr. gereicht würde. Nach ausgetheiltem Allmosen brachte der Bediente 1 Thlr. 16 Gr. zurück, mit Vermelden: es wären nicht mehr dann 30 Bettler gegenwärtig gewesen. Man fragt nach der Zahl x der Männer, y der Weiber und z der Kinder.

Gleich. $\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 15x + 12y + 10z = 6. \end{cases}$

XL. Man hat zween Eymer Wein von zwo Sorten, A und B, und einen Eymer Wasser. Der Eymer von A kömmt auf 30 Thlr., der Eymer von B auf 20 Thlr. zu stehn. Hieraus nun, und aus dem Wasser will man einen vierten Eymer mischen, der 24 Thlr. kosten soll. Man fragt, wie viel von der ersten Sorte des Weins x, und von der zweyten y, und von dem Wasser z zu nehmen sey. Gleich. $30x + 20y + 0z = 24$.

B) Aufgaben, worinn befaßte Gleichungen vorhanden sind.

XLI. Es wird von Stettin nach Schweden eine gewisse Anzahl Menschen übergeschiffet; darunter waren Schlesier, Brandeburger, Preußen und Sachsen. Der Schlesier waren so viel als der Brandeburger, und der Preußen x so viel als der Sachsen; aber die Brandeburger waren 4 Mann stärker als die Preußen. Wenn man die Zahl der Schlesier quadrirte, und davon die Hälfte der Preußen abzöge, blieben 496 übrig. Man fragt, wie viel Personen von jeder Nation zu Schiffe gegangen? Gleich. $x^2 + 8x + 16 - \frac{x^2}{2} = 496.$

XLII. Man fragte einen Vater, wie alt seine Töchter wären. Freund, antwortete er: die jüngste ist halb so alt, als die älteste; wenn ihr das Alter der beyden Töchter besonders quadriret, und diese Quadrate zusammen addiret, so kömmt 405 heraus. Man fragt, wie hoch das Alter x der ältern, und das Alter der jüngern gewesen. Gleich. $x^2 + \frac{x^2}{4} = 405.$

XLIII. Man hatte eine Uhr gegen x Thaler eingehandelt. Wenn man das Drittheil des Preißes mit dem Viertheile multiplicirt, kommen 108 Thaler heraus. Es wird der Preiß dieser Uhr verlangt.

Gleich. $\frac{x}{3} \times \frac{x}{4} = 108.$

XLIV. Hast du viel verspielt? fragte ein Gesell den andern. Bruder! wiedersetzte dieser, ich habe vier Thaler mehr verspielt, als du gewonnen hast. Wollte ich meinen Verlust mit deinem Gewinnst x multipliciren; so kämen 192 Thlr. heraus.

Gleich. $x \times (x + 4) = 192.$

XLV. Ich wurde gefragt, wie groß die Zahl meiner Schüler sey. Wenn ich, war meine Antwort, von dem Quadrate der Hälfte meiner Schüler 440 abziehe, bleibt so viel über, als groß ihre Zahl x ist. Gleich. $\frac{x^2}{4} - 440 = x$.

XLVI. Ein Cavalier hatte einen Diener gedungen, und demselben jährlich 70 Thlr und eine neue Livree zu geben versprochen. Die Livree ward ihm sogleich gegeben; aber nachdem der Diener so viel Wochen in Diensten gestanden, als viel Thaler die Livree gekostet hat, wird er seines Dienstes entlassen, wobey ihm 15 Thlr. 16 Gr. Dienstlohn gezahlet worden. Man fragt, wie viel Wochen x der Diener im Dienste gestanden, und wie hoch die Livree zu stehen gekommen ist?

Gleich. $\frac{70x + x^2}{52} = \frac{63 + x}{4}$

XLVII. Zween Menschen A und B setzen eine Geldsumme in die Lotterie ein, und gewinnen dabey einige Thaler. Wenn man den Einsatz a des A mit dem Einsatze b des B multiplicirt, und von diesem Producte 360 Thaler abzieht, so ist der Rest sechsmal größer als die Summe der Gewinnste x. Hätte A noch so viel eingesetzt, als die beyden Gewinnste ausmachen, so würde sein Einsatz dreymal größer als jener des B gewesen seyn: und hätte B noch so viel eingesetzet, als die beyden Gewinnste betragen, so würde sein Einsatz fünfmal so groß, als jener des A ausgefallen seyn. Man fragt, wie viel ein jeder eingesetzet und gezogen hat?

Gleich. $\begin{cases} ab - 360 = 6x \\ a + x = 3b \\ b + x = 5a. \end{cases}$

XLVIII. Man fragte einen Vater, wie alt ſein Sohn Aſcanius wäre. Ich, gab er zur Antwort, bin 42 Jahr alt; die Summe meiner Jahre und des Aſcanius ſeiner x iſt eine Quadratzahl, deren Wurzel das Alter des Aſcanius angiebt. Gleich. $x^2 = x + 42$.

XLIX. Man beſitzt einen Garten, welcher ein genaues Viereck ausmacht; in allen vier Ecken ſteht ein auf gleiche Weiſe gebautes und mit gleicher Zahl der Fenſter x verſehenes Häuschen; wenn man die Zahl der in einem Häuschen befindlichen Fenſter quadrirt, und ſolches Quadrat mit der Zahl der Fenſter von allen vier Eckgebäuden multiplicirt, kömmt 2048 heraus. Wie viel Fenſter waren wohl in einem Häuschen?

Gleich. $x^2 \times 4x = 2048$.

L. Haſt du Schwager viel über Winter ausgeſäet? fragte ein Bauer den andern; nicht allzuviel wiederſetzte dieſer: doch hab ich 6 Scheffel mehr als du ausgeſäet. Und wenn mir ein jeder Scheffel ſo viel brächte, als viel du geſäet haſt, würde ich 135 Scheffel ausdreſchen können. Man fragt, wie groß die Ausſaat des andern Bauers x geweſen. Gleich. $x^2 + 6x = 135$.

Ende.

122

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Zeplichal, Anton Michael

Ant. Zeplichals ... Algebra in Tabellen zum Gebrauche der Jünglinge und aller, die sich belehren wollen

Breslau 1774

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/GL 161(2)
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11341149-2
VD18 12544957-001